Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Stefan Liebscher

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 4.12.2014, 10:00

Aufgabe 25: Die unterhalb stetigen Funktionen $f_i \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^N)$, $i \in I$, seien bezüglich der Indexmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ geordnet, d.h.

$$\forall k, \ell \in I,\ k \leq l \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \qquad f_k(x) \leq f_\ell(x).$$

Zeige:

$$\sup_{i \in I} \int_{\mathbb{R}^N} f_i(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} \sup_{i \in I} f_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 26: Gegeben seien 2 identische (genügend lange) Zylinder im R^3, deren Längsachsen sich unter einem rechten Winkel schneiden. Bestimme das Volumen der Schnittmenge beider Zylinder.

Freiwilliger Zusatz: Betrachte den allgemeinen Fall von n identischen Zylindern, deren Längsachsen in einer gemeinsamen Ebene liegen und sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Dabei sollen benachbarte Achsen den gleichen Winkel $2\pi/n$ bilden. Bestimme das Volumen der Schnittmenge aller Zylinder.

Aufgabe 27:

(i) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers in $\mathbb{R}^3$, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die Abszissen-Achse dreht.

(ii) Bestimme das Volumen des dreidimensionalen Volltorus

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + \left(2 - \sqrt{y^2 + z^2}\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Aufgabe 28: Bestimme das maximale Volumen eines in ein Ellipsoid

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \;=\; 1$$

einbeschriebenen Quaders.