Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Stefan Liebscher

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 11.12.2014, 10:00

Aufgabe 29: Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$. Zeige, dass sich M lokal nahe $a \in M$ als Graph $h : T_aM \to \mathbb{R}$ über dem Tangentialraum schreiben lässt.

Aufgabe 30: Gib einen geeigneten Atlas an, um zu zeigen, dass der Torus

$$T^2 \;=\; \left\{\; (x,y,z) \;\middle|\; z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2 \;=\; 1 \;\right\} \;\subset\; \mathbb{R}^3$$

eine C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension zwei ist. Bestimme die Kartenwechsel.

Aufgabe 31: Die Mercator-Projektion $P : S^2 \setminus \{N,S\} \to Z$ nach Gerhard Mercator (1512-1594) bildet die Einheitserde S^2 (bis auf den Nordpol N und den Südpol S) auf den Zylinder $Z = S^1 \times \mathbb{R}$ ab, der die Erde am Äquator berührt. Koordinaten auf S^2 sind hier die geographische Länge $\phi \in [0, 2\pi)$ und die geographische Breite $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Die Projektion hat die Form $P(\phi, \theta) = (\phi, p(\theta))$ mit $p(0) = 0$.

(i) Bestimme $p : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, so dass P winkeltreu ist.

Hinweis: Dazu genügt es, dass die Schnittwinkel jeder Kurve mit den Breitenkreisen $\{\theta \text{ konstant}\}$ in Bild- und Urbildraum der Karte übereinstimmen.

(ii) Bestimme konkret die Abstände $p(\theta)$ (auf der Karte) zwischen Breitenkreisen θ Grad nördlicher Breite und dem Äquator für

$$\theta \;\in\; \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$$

Vergleiche die Ergebnisse mit folgenden Werten, die von einer Orginalkarte Mercators stammen. (1567, ca. 100 Jahre vor Newton)

x	10	20	30	40	50	60	70	80
l/mm	55	112	172	238	314	407	534	749

(iii) Folgere, dass Bilder von sogenannten Loxodromen, d.h. Kurven auf der Sphäre, die alle Längenkreise unter dem gleichen Winkel schneiden, Geraden auf Z sind. Deshalb sind die Mercator-Karten für die Seefahrt (ohne GPS) von großer Bedeutung. Sie ermöglichen die Navigation per Lineal.

Aufgabe 32: Zeige, dass die Einheitssphäre

$$S^2 \;=\; \left\{(x_1,x_2,x_3) \;\middle|\; x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\right\} \;\subset\; \mathbb{R}^3$$

eine C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension zwei ist. Zeige dazu, dass die beiden Abbildungen $\phi_{N,S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\phi_N(x_1,x_2) &= \frac{2}{x_1^2+x_2^2+1}(x_1,x_2,-1)+(0,0,1),\\
\phi_S(x_1,x_2) &= \frac{2}{x_1^2+x_2^2+1}(x_1,x_2,1)+(0,0,-1).
\end{aligned}$$

einen Atlas bilden. (Dies sind die Umkehrungen der stereographischen Projektionen.) Bestimme die Kartenwechsel für diese beiden Karten.

Freiwilliger Zusatz: Was sind die Bilder von Geraden und Kreisen unter dem Kartenwechsel?