Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Stefan Liebscher

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 15.1.2015, 10:00

Aufgabe 37: Seien $f, g \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $u \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dabei sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge. Zeige

(i) $\operatorname{rot}(\lambda f + \mu g) \;=\; \lambda \operatorname{rot} f + \mu \operatorname{rot} g$,

(ii) $\operatorname{rot}(uf) \;=\; u \operatorname{rot} f + (\operatorname{grad} u) \times f$,

(iii) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u \;=\; 0$,

(iv) $\operatorname{div}\operatorname{rot} f \;=\; 0$.

Aufgabe 38: Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $A \in SO(3)$ eine orthogonale Matrix. Für Vektorfelder $g \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ definiere $g^A \in C^1(A(U), \mathbb{R}^3)$ durch

$$g^A(x) \;:=\; Ag(A^{-1}x).$$

Sei nun $S \subset U$ eine C^2-Fläche mit Normalen $\nu_S(x)$ und C^2-Rand ∂S. Zeige: dann ist $S^A := A(S) \subset A(U)$ ebenfalls eine C^2-Fläche mit Normalen $\nu_{S^A} = (\nu_S)^A$, und es gilt

$$\int_S g \cdot \nu_S \,\mathrm{d}S \;=\; \int_{S^A} g^A \cdot \nu_{S^A} \,\mathrm{d}S.$$

Folgere daraus, dass für Vektorfelder $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ gilt:

$$\operatorname{rot}(f^A) \;=\; (\operatorname{rot} f)^A.$$

Aufgabe 39: Es sei $K \subset \mathbb{R}^N$ ein kompaktes C^1 Gebiet mit äußerer Normalen n. Ferner seien $u, v \in C^2(U, \mathbb{R})$ auf einer offenen Umgebung U von K gegeben. Definiere

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) \;=\; \nabla u(x) \cdot n(x) \qquad \text{(Skalarprodukt)}.$$

Zeige, dass dann die Greenschen Formeln gelten

(a) $$\int_K v\,\Delta u \,\mathrm{d}x \;=\; -\int_K \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial K} v \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S,$$

(b) $$\int_K v\,\Delta u \,\mathrm{d}x \;=\; \int_K u\,\Delta v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial K} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}S.$$

Aufgabe 40: Sei $\mathrm{div} F > 0$ für ein stetig differenzierbares Vektorfeld F innerhalb einer Umgebung des Einheitsballs $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Zeige, dass F nicht überall tangential an die Oberfläche der Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ sein kann.