Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Stefan Liebscher

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 22.1.2015, 10:00

Aufgabe 41: Betrachte erneut die durch die Umkehrung der stereographischen Projektion gegebe Karte $\phi_N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\phi_N(x_1, x_2) \;=\; \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}(x_1, x_2, -1) + (0, 0, 1),$$

der Einheitssphäre ohne den Nordpol. Bestimme den metrischen Tensor. Zeige, dass ϕ_N winkeltreu, aber nicht längentreu ist. Bestimme den Breitengrad, bis zu dem die Längenverzerrungen der durch ϕ_N dargestellten Südpolarregion unter 5% bleiben.

Aufgabe 42: Gib eine Parametrisierung eines im $\mathbb{R}^3$ eingebetteten Möbiusbands an.

Sei ∂M eine Drahtschleife, die ein solches im $\mathbb{R}^3$ eingebettetes Möbiusband M berandet. Entscheide, ob im allgemeinen ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld einen Strom im Draht bewirkt.

Hinweis: Elektrisches Feld E und Magnetfeld B erfüllen

$$\operatorname{rot} E \;=\; -\frac{\partial}{\partial t} B.$$

Im Draht wird ein Strom erzeugt, wenn das Integral des elektrischen Feldes,

$$\int_{\partial M} E \cdot \vartheta, \qquad \vartheta \text{ Einheitstangentenvektor an } \partial M,$$

entlang des Drahtes nicht verschwindet.

Aufgabe 43: Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{rot} f = 0$. Zeige, dass sich f als Gradient einer C^1-Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ schreiben lässt:

$$f \;=\; \operatorname{grad} \varphi.$$

Hinweis: Definiere φ durch (ein) geeignete(s) Wegintegral(e). Zeige dann, dass φ wohldefiniert ist bzw. der Gradient das gesuchte Vektofeld liefert.

Aufgabe 44: Zeige, dass das in der Vorlesung definierte Lebesgue-Integral auf dem Raum

$$\mathcal{L}_1 \;:=\; \left\{ \; f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \mid f \text{ Lebesgue-integrierbar} \; \right\}$$

linear, monoton und translationsinvariant ist.