Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Stefan Liebscher
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 29.1.2015, 10:00

Aufgabe 45: Es sei $A \subset \mathbb{R}^N$ eine Lebesgue-Nullmenge. Zeige:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, U \subset \mathbb{R}^N \text{ offen, so dass } A \subset U \text{ und } \operatorname{Vol}(U) < \varepsilon.$$

Aufgabe 46: [Fatou] Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \text{Leb}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, $f_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mit $f_n \geq 0$ fast überall. Weiter gebe es ein $c > 0$, so dass für alle n gilt: $\int f_n \leq c < \infty$. Zeige, dass dann gilt

$$f \;:=\; \liminf_{n\to\infty} f_n \in \text{Leb}$$

und

$$\int f \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Aufgabe 47: Beweise oder widerlege für Lebesgue-integrierbare reelle Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(i) Das (punktweise) Maximum $h(x) := \max(f(x), g(x))$ ist Lebesgue-integrierbar.

(ii) Das (punktweise) Minimum $h(x) := \min(f(x), g(x))$ ist Lebesgue-integrierbar.

(iii) Das (punktweise) Produkt $h(x) := f(x)g(x)$ ist Lebesgue-integrierbar.

(iv) Der (punktweise) Quotient $h(x) := f(x)/g(x)$ ist Lebesgue-integrierbar, falls f und g positiv sind.

(v) Die (punktweise) Wurzel $h(x) := \sqrt{|f(x)|}$ ist Lebesgue-integrierbar, falls f einen kompakten Träger besitzt.

(vi) Die Komposition $h(x) := g(f(x))$ ist Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 48: Wir wollen eine Menge $V \subset [0,1) \subset \mathbb{R}$ konstruieren, deren charakteristische Funktion χ_V nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Definiere dazu die folgende Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$:

$$x \simeq y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Das Auswahlaxiom der Mengenlehre postuliert die Existenz eines Vertretersystems: sei also $V \subset [0,1)$ eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse der zuvor definierten Relation genau einen Vertreter enthält.

Ferner sei $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0,1)$. Definiere die translatierten Mengen

$$V_j \;=\; \{x \in [0,1) \mid \exists n \in \mathbb{Z} : \, x - r_j + n \in V\} \;=\; V + r_j \pmod 1, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeige, dass die Mengen V_j paarweise disjunkt sind.

(ii) Zeige, dass $[0,1) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j$.

(iii) Zeige, dass die charakteristische Funktion

$$\chi_V(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } x \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Bemerkung: Diese Konstruktion einer nicht Lebesgue-integrierbaren Funktion zeigt insbesondere, dass hier keine Unzulänglichkeit unseres Integralbegriffs vorliegt. Allein die (gewünschte) Translationsinvarianz und ς-Additivität des Integrals liefern (unter Annahme des Auswahlaxioms) notwendig die Existenz nicht-integrierbarer Funktionen.