Freiwillige Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Stefan Liebscher
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 5.2.2015, 10:00

Aufgabe 49: Gib eine in L^1 konvergente Folge integrierbarer Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^1} \;=\; 0,$$

an, deren punktweise Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{für kein } x \in [0,1]$$

existieren. Gib aber auch eine Teilfolge $n_k \to \infty$ dieser Folge an, so dass

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \quad \text{fast überall}$$

gilt.

Freiwilliger Zusatz: Finde in L^p konvergente Folgen $f_n \in L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, die auf $\mathbb{R}^N$ nirgends punktweise konvergieren.

Aufgabe 50: Bestimme in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le p < \infty$ diejenigen $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$f \;:\; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) \;=\; \|x\|_2^\alpha$$

in $\mathcal{L}_p$ liegt.

Aufgabe 51: Es sei $1 \le p, q < \infty$. Für eine Funktion $f \in L^p$ gelte

(a) f ist beschränkt, beziehungsweise

(b) $\operatorname{supp}(f) \subset V$ und $\operatorname{Vol}(V) < \infty$.

Beweise oder widerlege *jeweils*

(i) $f \in L^q$, für $q > p$, beziehungsweise

(ii) $f \in L^q$, für $q < p$.

Aufgabe 52: Es seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $1 \le p, q < \infty$. Zeige, dass dann die Faltung

$$\big(f * g\big)(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

in $L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt, mit

$$\frac{1}{r} \;=\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Hinweis: Es gilt

$$|f * g|(x) \;\le\; \int_{\mathbb{R}^n} \Big(|f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r}\Big)\; |f(x-y)|^{p-p/q}\; |g(y)|^{q-q/p}\,\mathrm{d}y.$$

Nutze nun die (Variante der) Hölderungleichung $\|uvw\|_{L^1} \;\le\; \|u\|_{L^\alpha}\,\|v\|_{L^\beta}\,\|w\|_{L^\gamma}$, mit geeigneten Exponenten $1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma = 1$.