Freiwillige Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Stefan Liebscher
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 8.1.2015, 10:00

Aufgabe X1: Dir obliegt die Versorgung der Gäste der Neujahrs-Party mit Getränken. Dazu transportierst Du ein Fass Bowle auf einem Schlitten durch die Stadt. Aufgrund diverser Schlaglöcher beginnt das Fass jedoch bedrohlich zu kippeln. Um es zu stabilisieren, schenkst Du die Bowle an umstehende Schaulustige aus. (Selbst trinkst Du natürlich nichts: Don't drink and drive!)

Wie weit muss das Fass ausgetrunken werden, damit es möglichst stabil steht?

Hinweis: Die Höhe des Schwerpunktes

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} x\,\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

soll also minimiert werden! Hierbei ist ρ die Dichte, die für übliche irdische Gefäße und Flüssigkeiten in selbigen einen beschränkten Träger hat. Das leere Fass soll dabei eine Masse m und eine Schwerpunktshöhe h haben (die man normieren kann). Die Form des Fasses kann als zylindrisch angenommen werden.

Zusätze: Was passiert für ganz leichte Gefäße, $m \to 0$, bei konstanter Form resp. Schwerpunktshöhe? Kannst Du die Schwerpunktshöhe auch noch minimieren, falls das Fass vor dem Umtrunk schon vom Schlitten gefallen war und deshalb nun eine unregelmäßige Form aufweist?

Aufgabe X2: Nachdem der Bowle-Transport dank der selbstlosen Hilfe vieler Passanten gut geklappt hat, wendet sich eine Transportfirma an Dich.

Die Firma plant, Bowle in Fässern zu transportieren, die entsprechend der vorigen Aufgabe zwecks maximaler Stabilität befüllt werden. Alle Fässer haben die gleiche (zylindrische) Form und Größe. Allerdings stehen unterschiedliche Materialien für die Fässer zur Verfügung.

Bestimme die Masse des Fasses mit bestmöglicher Nutzlast, d.h. maximalem Verhältnis der Masse der eingefüllten Bowle zur Gesamtmasse von Bowle, Fass und Schlitten.

Bestimme eine allgemeine Lösung und/oder wähle plausible Werte der Parameter.

Aufgabe X3: Sei

$$F(x, y) \;=\; 2x^4 + y^3 + py - q, \qquad \text{mit } p, q > 0.$$

Für hinreichend kleine $|x|$ lässt sich die Gleichung $F(x, y) = 0$ durch positive $y(x)$ auflösen. Berechne $y'(x)$, ohne $y(x)$ explizit auszurechnen.

Aufgabe X4: Bestimme gegebenenfalls die ersten Ableitungen (im Banachraum!) folgender Abbildungen

(i) $\Phi\,:\, BC^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times BC^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow BC^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad (g,f) \longmapsto g \circ f$

(ii) $\Psi\,:\, BC^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow BC^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad f \longmapsto f \circ f$

Dabei bezeichnen BC^0 und BC^k die Banachräume der beschränkten stetigen Funktionen bzw. der beschränkten Funktionen mit k beschränkten und stetigen Ableitungen.

Freiwilliger Zusatz: Ist Ψ in (ii) aufgefasst als Abbildung $BC^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to BC^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ebenfalls differenzierbar?

Aufgabe X5: Es sei $\varrho \in C^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ mit $|\varrho(x)| \to \infty$ für $|x| \to \infty$. Weiter sei $f \in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. Das beschränkte Intervall $[a,b]$ bestehe nur aus regulären Werten von ϱ. Zeige, dass dann gilt

$$\int\limits_{\{x\,|\,a<\varrho(x)<b\}} f\,\mathrm{d}x \;=\; \int\limits_a^b \left(\int_{\varrho^{-1}(c)} f\,|\nabla\varrho|_2^{-1}\,\mathrm{d}S \right) \mathrm{d}c.$$

Aufgabe X6: Bezeichne $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x|_2 = 1\}$ die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre.

(i) Bestimme den Oberflächeninhalt der 2-Sphäre S^2,

$$\mathrm{vol}_2(S^2) \;:=\; \int_{S^2} 1\,\mathrm{d}S,$$

z.B. durch Wahl einer Karte in Polarkoordinaten.

(ii) Bestimme das $(n-1)$-dimensionale Volumen der $(n-1)$-Sphäre,

$$\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1}) \;:=\; \int_{S^{n-1}} 1\,\mathrm{d}S.$$

(iii) Vergleiche mit dem n-dimensionalen Volumen

$$\mathrm{vol}_n(B^n_{(1,1+\varepsilon)}) \;:=\; \int_{B^n_{(1,1+\varepsilon)}} 1\,\mathrm{d}x,$$

der Kugelschale $B^n_{(1,1+\varepsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, 1 \le |x|_2 \le 1+\varepsilon\}$, und zeige, dass

$$\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1}) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathrm{vol}_n(B^n_{(1,1+\varepsilon)})\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Aufgabe X7: Betrachte einen durch die Kurve $y = x^2$ gegebenen Parabolspiegel in der Ebene. Einfallende Lichtstrahlen parallel zur y-Achse werden am Spiegel reflektiert, d.h. der Einfallswinkel (Winkel zwischen einfallendem Lichtstrahl und Normalenvektor an die Parabel) ist gleich dem Ausfallswinkel.

Zeige, dass sich alle reflektierten Strahlen in einem Punkt schneiden und bestimme diesen Brennpunkt.

Freiwilliger Zusatz: Was ist der geometrische Ort der Punkte der Ebene, die von einem gegebenen Punkt denselben Abstand wie zu einer gegebenen Geraden haben?

Aufgabe X8: Sei $\alpha(s)$ eine C^2-Kurve in $\mathbb{R}^2$, parametrisiert nach der Bogenlänge. Zeige, dass man jeden Punkt einer Umgebung von α eindeutig in der Form $\alpha(s) + tn(s)$, $t \in (-\varepsilon(s), \varepsilon(s))$ schreiben kann. Hierbei ist $n(s)$ die Einheitsnormale an α im Punkt $\alpha(s)$.

Freiwilliger Zusatz: Bezeichne

$$\eta(s) \;=\; \alpha(s) + \frac{\ddot{\alpha}(s)}{|\ddot{\alpha}(s)|^2},$$

die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte oder *Evolute* von α. (Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass stets $\ddot{\alpha}(s) \neq 0$ gilt.) Sei N das Gebiet zwischen den beiden Kurven α und η. Zeige, dass man die obigen Koordinaten im gesamten Inneren von N einführen kann, aber nicht jenseits der Evolute.

Aufgabe X9: Seien $0 < r < R$ gegeben. Bestimme eine Abbildung $\eta : (-L, L) \to (-\pi, \pi)$, so dass durch $\psi : (0, 2\pi) \times (-L, L) \to \mathbb{R}^3$,

$$\psi(\xi, \vartheta) \;=\; \begin{pmatrix} (R + r\cos\eta(\vartheta))\cos\xi \\ (R + r\cos\eta(\vartheta))\sin\xi \\ r\sin\eta(\vartheta) \end{pmatrix},$$

eine winkeltreue Karte des Torus gegeben ist. Wähle dabei L maximal.

Aufgabe X10: [Huygens, 1629-1695] Auf welcher Kurve muss ein Pendel schwingen, damit seine Periode nicht von der Amplitude abhängt?

Hinweis: Betrachte ein idealisiertes Pendel unter Vernachlässigung von Reibungseffekten in einem konstanten Schwerefeld $\overrightarrow{g} = (0, -g)^{\mathrm{T}}$. Sei $\alpha(s) = (x(s), y(s))^{\mathrm{T}}$ die auf Bogenlänge parametrisierte Kurve, auf die die an einem masselosen Faden aufgehängte Punktmasse m eingeschränkt ist, $\alpha(0)$ sei die stabile Ruhelage. (Solch eine Bahnkurve ist z.B. zu erreichen, indem der Fadenlauf an seinem Aufhängepunkt durch die Evolute β von α eingeschränkt wird.)

Die Physik lehrt uns nun, dass der Massepunkt durch das Schwerefeld beschleunigt wird:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}s = \overrightarrow{g} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha(s) = -g\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}y(s).$$

Die Periode der entstehenden Schwingung ist von der Auslenkung unhabhängig, falls andererseits

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}s = -cs$$

für irgendeine positive Konstante c gilt, d.h. das Pendel ein harmonischer Oszillator ist.

Dadurch ist die Bahnkurve $\alpha(s)$ (die uns übrigens schon auf einem früheren Aufgabenzettel begegnet ist) festgelegt.