Kernfragen zur Analysis

VII. Differentiation im Banachraum

1. Wann heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y Fréchet-differenzierbar? Was ist die Fréchet-Ableitung von f ?

2. Ist eine Fréchet-differenzierbare Abbildung f zwischen Banachräumen immer stetig?

3. Was sind die Gateaux-Ableitungen einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y ?

4. Was sind die partiellen Ableitungen einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

5. Wie lässt sich die Fréchet-Ableitung einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch ihre partiellen Ableitungen ausdrücken?

6. Was ist die Ableitung des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ im Hilbertraum H ?

7. Was ist der Gradient der Abbildung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2^{-1}$, wobei $\| \cdot \|_2$ die euklidische Norm bezeichnet?

8. Wie lautet die Kettenregel für die Ableitung von $f \circ g$?

9. Wie lässt sich die Linearisierung einer Abbildung $f \circ g$ durch die partiellen Ableitungen der Abbildungen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ ausdrücken?

10. Warum sind stetig differenzierbare Funktionen mit beschränkter Ableitung (global) Lipschitz-stetig? (Beweis!)

11. Welche der folgenden Aussagen sind für Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ richtig, welche falsch?
    (a) Partiell differenzierbare Abbildungen sind stetig.
    (b) Diffenzierbare Abbildungen sind stetig.
    (c) Partiell differenzierbare, stetige Abbildungen sind differenzierbar.
    (d) Stetig partiell differenzierbare Abbildungen sind differenzierbar.
    (e) Stetig partiell differenzierbare Abbildungen sind stetig differenzierbar.

12. Wie hängen Fréchet-Ableitung und Gateaux-Ableitungen einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y zusammen?

13. Wie lautet der Satz über implizite Funktionen?

14. Unter welcher hinreichenden Bedingung ist eine Abbildung $f : X \to X$ lokal invertierbar?

15. Welche Linearisierung hat die implizit durch $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$ gegebene Funktion $x_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$?

16. Warum bezeichnet der Gradient die „Richtung des steilsten Anstiegs“ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

17. Wie ist die zweite (Fréchet-)Ableitung einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y definiert? Was sind die zweiten Gateux-Ableitungen?

18. Wie lässt sich die zweite Fréchet-Ableitung einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch ihre partiellen Ableitungen ausdrücken?

19. Wann darf man die Reihenfolge der zweiten partiellen Ableitungen vertauschen?

20. Was sind die erste und zweite Ableitung des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ im Hilbertraum H ?

21. Wie lautet die Kettenregel für die zweite Ableitung von $f \circ g$?

22. Wie lässt sich die zweite Ableitung einer Abbildung $f \circ g$ durch die partiellen Ableitungen der Abbildungen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ausdrücken?

23. Welche Beziehung herrscht zwischen dem Gradient und den Niveauflächen $\{f \equiv \text{const.}\}$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

24. Welche notwendigen und welche hinreichenden Bedingungen für die Existenz lokaler Maxima/Minima einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kennst Du?

25. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Welche der folgenden Aussagen sind für Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ richtig, welche falsch?
    (a) Konvexe Funktionen sind stetig.
    (b) Konvexe Funktionen sind im Inneren des Definitionsbereiches stetig.
    (c) Konvexe Funktionen sind zweimal differenzierbar und haben in jedem Punkt eine positiv semidefinite zweite Ableitung.
    (d) Zweimal differenzierbare Funktionen mit (überall) positiv semidefiniter Hesse-Matrix sind konvex.
    (e) Zweimal differenzierbare Funktionen mit (überall) (strikt) positiv definiter Hesse-Matrix sind strikt konvex.
    (f) Konvexe Funktionen nehmen ihr Minimum an.
    (g) Konvexe Funktionen auf kompakten Gebieten nehmen ihr Minimum an.
    (h) Strikt konvexe Funktionen besitzen höchstens ein Minimum.
    (i) Strikt konvexe Funktionen auf kompakten Gebieten besitzen genau ein lokales Minimum.
    (j) Strikt konvexe Funktionen auf kompakten Gebieten besitzen genau ein Minimum.

26. Wo nimmt eine symmetrische quadratische Form ihr Maximum/Minimum auf der Einheitssphäre an? Beweis?

27. Wie lautet die Taylor-Approximation einer Funktion $f \in C^{n+1}(U, Y)$, $U \subseteq X$ offen, in einem Punkt $x_0 \in U$? Welche Darstellungen/Abschätzungen des Restgliedes kennst Du?