

Projektive Geometrie der Ebene

Skript zur Vorlesung

Stefan Liebscher

`stefan.liebscher@fu-berlin.de`

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de`

Freie Universität Berlin

Institut für Mathematik

Arnimallee 3

D-14195 Berlin

Entwurf vom 15. Juli 2015

*La géométrie est une espèce de hochet
que la nature nous a jeté
pour nous consoler et nous amuser
dans les ténèbres.*

(Jean-Baptiste le Rond d'Alembert an Friedrich II.)

*Die Geometrie ist eine Art Spielzeug,
welches die Natur uns zuwarf
zum Troste und zur Unterhaltung
in der Finsternis.*

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1	
1.1	Zusammenfassung	1	
1.2	Eingangstest	2	1. Lektion
1.3	Historisches zu Perspektive und Geometrie	3	
1.4	Ausblick	4	
2	Grundbegriffe	5	
2.1	Der Projektive Raum	5	
2.2	Punkte und Linien	5	
2.3	Projektive Abbildungen	7	2. Lektion
2.4	Die projektive Gerade	8	
2.5	Doppelverhältnisse	8	
2.6	Der Satz von Pappos	10	
3	Vollständige Vierecke & harmonische Verhältnisse	13	
3.1	Projektive Involutionen	13	3. Lektion
3.2	Der Satz von Desargues	14	
3.3	Vierecke & Vierseite	15	
3.4	Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie	17	
4	Kegelschnitte	19	
4.1	Quadratische Formen	19	4. Lektion
4.2	Die Polarität	23	5. Lektion
4.3	Büschel von Kegelschnitten	25	
4.4	Der Kegelschnitt als projektive Gerade	27	
4.5	Die Sätze von Pascal & Brianchon	28	6. Lektion
4.6	Kegelschnittkonstruktionen	30	
5	Die Cayley-Klein Geometrien	33	
5.1	Spiegelungen als ausgezeichnete Involutionen	33	
5.2	Die euklidische Ebene	34	7. Lektion

5.3	Die Klassifikation durch den absoluten Kegelschnitt	36	
5.4	Die Metrik aus dem Doppelverhältnis	37	
5.4.1	Hyperbolische Längenmessung	40	
5.4.2	Elliptische Längenmessung	41	
5.4.3	Parabolische (euklidische) Längenmessung	42	
5.4.4	Desingularisierter Abstandsvergleich	43	
5.5	Spiegelungen & Orthogonalität	45	8. Lektion
5.6	Die Minkowski Ebene	48	
6	Kreise	53	
6.1	Metrische Charakterisierung	53	9. Lektion
6.2	Charakterisierung durch Spiegelungen	54	
6.3	Umkreise, Inkreise und Ankreise	57	
6.4	Peripheriewinkel	59	
7	Brennpunkte	63	
7.1	Die euklidische Ellipse	63	10. Lektion
7.2	Brennpunkte, Brennlinien und das Diagonal-Dreieck	65	
7.3	Büschel konfokaler Kegelschnitte	69	11. Lektion
8	Geodäten & Parallelverschiebung	75	
8.1	Der geodätische Fluss	75	12. Lektion
8.2	Horozyklen	76	
8.3	Paralleltransport & Krümmung	82	
9	Die drei Brennpunkt-teilenden Ellipsen	85	
9.1	Historisches	85	13. Lektion
9.2	Allgemeine projektive Formulierungen	86	
9.3	Algebraische Beweise	87	
A	Basiswissen, lineare Algebra	91	
	Literatur	93	

1 Einleitung

1.1 Zusammenfassung

Im Mittelalter weitgehend vergessen, wurde die Perspektive zunächst von den Künstlern der Frührenaissance wiederentdeckt, um Tiefenwirkung zu erzielen. Vorreiter wie [Giotto di Bondone](#) bemühten sich noch mit [wechselndem Erfolg](#). Die [Filippo Brunelleschi](#) zugeschriebenen konstruktiven Prinzipien der Perspektive lösten einen regelrechten „Hype“ in der Malerei aus. Perspektivische Darstellungen unterschiedlicher Komplexität finden sich neben vielen anderen bei [Leonardo da Vinci](#) ([Verkündigung](#)), [Albrecht Dürer](#) ([Der heilige Hieronymus](#)) und [Raffael](#) ([Vermählung Mariä](#)).

Fasziniert von einer der wenigen antiken Schriften, die dem wissenschaftlichen Niedergang nicht zum Opfer fiel, quälten sich die Mathematiker in den zwei Jahrtausenden nach [Euklid](#) mit der Frage, ob durch einen Punkt wirklich nur eine Parallele gehen kann. Als [János Bolyai](#), [Nikolai Lobačevskij](#) und [Carl Friedrich Gauß](#) unabhängig voneinander endlich die Antwort in Form der nichteuklidischen Geometrien fanden, wurden sie jedoch weitgehend ignoriert oder gingen mit ihren Ideen erst gar nicht an die Öffentlichkeit.

[Arthur Cayley](#) und [Felix Klein](#) verdanken wir schließlich die Einbettung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien als Modelle der projektiven Geometrie. Dadurch gestattet der projektive Raum einen einheitlichen Zugang zu den verschiedenen Geometrien. Das kann unserer Intuition eine große Hilfe sein, wenn wir Fragen z.B. der Differentialgeometrie, Dynamik oder Kosmologie studieren.

Um die Sachverhalte noch zeichnerisch darstellen zu können, wird sich die Vorlesung weitestgehend auf die (reelle) projektive Ebene beschränken und damit beschäftigen, was man dort mit Kegelschnitten so alles anfangen kann. Hier zeigt sich die durch den projektiven Zugang erreichbare Klarheit auf besonders beeindruckende Weise. Die Vorlesung wird unter anderem aufzeigen, dass/wie man Geometrie betreiben kann, ohne zu messen. Auch wollen wir verstehen, inwiefern die euklidische Ebene — also unsere übliche geometrische Vorstellungswelt — ein singulärer Grenzfall (unter den Cayley-Klein Geometrien) ist und wie uns das helfen kann, geometrische Sachverhalte zu verstehen.

In der Tat wird auf der projektiven Ebene eine Geometrie gewählt, indem ein absoluter Kegelschnitt als Menge der unendlich fernen Punkte ausgezeichnet wird. (Der absolute Kegelschnitt der euklidischen Ebene degeneriert dabei zu einer Doppelgeraden — dem Horizont.) Eigenschaften von Kegelschnitten — z.B. ihre Brennpunkte oder die Eigenschaft, ein Kreis zu sein, — werden so zu Relationen zwischen Kegelschnitten.

Dies kann auch eindrucksvoll am Computer dargestellt werden. So finden wir z.B.

- [das vollständige Viereck](#) als fundamentale Konstruktion der projektiven Geometrie,
- [die Brennpunkte zweier Kegelschnitte](#) als Ecken des vollständigen Vierseits ihrer gemeinsamen Tangenten,
- [Büschel](#) und [duale Büschel](#) von Kegelschnitten, [Kreisen](#) und [Horozyklen](#),
- und schließlich [einen animierten Rundkurs](#) durch die Geometrien.

Studierenden der Mathematik eröffnet die projektive Geometrie die Chance, fundamentale Sachverhalte der Differentialgeometrie, Dynamik und Kosmologie an einem interessanten, nichttrivialen Beispiel zu verstehen, das aber trotzdem noch der geometrischen Anschauung zugänglich ist.

Motivierten Lehramtsstudierenden sollten hier viele Überraschungen begegnen, die (nicht nur) Schüler begeistern können. Die projektive Geometrie wird zwar auch in der allgemeinen Geometrie-Vorlesung angesprochen, für die hier verfolgte Sichtweise bleibt dort aber in der Regel keine Zeit.

Studierende der Informatik interessieren sich außerdem vielleicht für Möglichkeiten und Schwierigkeiten, die projektive Ebene als [Javascript-Anwendung](#) umzusetzen. Insbesondere zeigt sich hier, dass die direkte Nutzung der Grafikkarte im Web-Browser nicht nur den Online-Ego-Shootern nutzt.

Vorkenntnisse aus der Lineare Algebra und (Elementar-)Geometrie werden sich als nützlich erweisen.

1.2 Eingangstest

Was glauben wir aus der Geometrie noch zu wissen?

1. Wie viele Mittelpunkte hat ein Punktepaar?
2. Wie viele Winkelhalbierende hat ein Linienpaar?
3. Wie viele Kreise gehen durch drei gegebene Punkte?
4. Wie viele Kreise berühren drei gegebene Linien?
5. Wie viele Brennpunkte hat eine Ellipse?
6. Was ist ein Kreis?
7. Wie viele seiner Brennpunkte fallen im Mittelpunkt eines Kreises zusammen?

1.3 Historisches zu Perspektive und Geometrie

356– 323	Alexander III. von Makedonien	
325– 265	Euklid von Alexandria	Geometrie, Optik
262– 190	Apollonius von Perga	Kegelschnitte
79	Pompeji	Römische Wandmalerei, Scheinarchitektur
290– 350	Pappos von Alexandria	Satz von Pappos
355– 415	Hypatia von Alexandria	Finaler Niedergang antiker Wissenschaft
965–1040	Ibn al-Haytham	Optik
1048–1131	Omar Khayyam	Kegelschnitte, Geometrie
1266–1337	Giotto di Bondone	Fresken mit Ansätzen von Perspektive
	Steigendes Interesse und Verfügbarkeit antiker Schriften in Europa	
1377–1446	Filippo Brunelleschi	konstruktive Prinzipien der Perspektive
1453		Eroberung Konstantinopels
1415–1492	Piero della Francesca	De Prospectiva Pingendi
1452–1519	Leonardo da Vinci	ein Fluchtpunkt
1483–1520	Raffaello Sanzio da Urbino	mehrere Fluchtpunkte, Horizont
1471–1528	Albrecht Dürer	ein Fluchtpunkt
1591–1661	Gérard Desargues	Perspektive, Kegelschnitte, Doppelverhältnis
1623–1662	Blaise Pascal	Verallgemeinerung des Satzes von Pappos
1640–1697	Jørgen Mohr	Konstruktion allein mit dem Zirkel
1685–1731	Brook Taylor	mathematische Grundlagen der Perspektive
1746–1818	Gaspard Monge	darstellende Geometrie
1750–1800	Lorenzo Mascheroni	Konstruktion allein mit dem Zirkel
1771–1895	Joseph Diaz Gergonne	Dualität
1777–1855	J. Carl Friedrich Gauß	Krümmung, hyperbolische Geometrie
1783–1864	Charles J. Brianchon	Duale Version des Satzes von Pascal
1788–1867	Jean-Victor Poncelet	Konstruktion mit Lineal und festem Kreis
1790–1868	August Ferdinand Möbius	homogene Koordinaten, Dualität
1792–1856	Nikolaj I. Lobačevskij	hyperbolische Geometrie
1793–1880	Michel Chasles	Doppelverhältnis, Involution, Büschel
1796–1863	Jakob Steiner	Konstruktion mit Lineal und festem Kreis
1798–1867	Karl G.Ch. von Staudt	synthetische Geometrie, Fundamentalsatz
1801–1868	Julius Plücker	Plücker-Koordinaten, Kegelschnitt-Büschel
1802–1860	János Bolyai	hyperbolische Geometrie
1809–1877	Hermann G. Graßmann	Vektor- und Tessorrechnung

1821–1895	Arthur Cayley	Gruppentheorie, Klassifikationsansätze
1826–1866	G.F. Bernhard Riemann	Differentialgeometrie
1835–1900	Eugenio Beltrami	Modelle der hyperbolischen Ebene
1849–1925	Felix Ch. Klein	Erlanger Programm
1854–1912	J. Henri Poincaré	
1862–1943	David Hilbert	moderne Axiomatisierung der Geometrie

Siehe auch [[Rus05](#)] und [The MacTutor History of Mathematics archive](#).

1.4 Ausblick

Was wollen wir in der Vorlesung verstehen?

1. vollständiges Viereck als Vermittler harmonischer Verhältnisse
2. durch Kegelschnitte vermittelte Polarität von Punkten und Geraden
3. Erzeugung der Geometrie durch ihre Spiegelungen
4. Auswahl der Spiegelungen durch die Polarität an einem absoluten Kegelschnitt
5. Klassifikation der Cayley-Klein Geometrien
6. Brennpunkte als Eigenschaft von Kegelschnittpaaren
7. Gärtner-Konstruktion der Kegelschnitte
 - (a) feste Abstandssumme/-Differenz vom Brennpunktpaar
 - (b) spiegelbildliche Paare der Brennpunkt-Sehnen
 - (c) eindeutige Lote der Brennpunkt-Sehnen
 - (d) Kreis als Spiegelbild eines Brennpunktes
8. Kreise
 - (a) konstanter Abstand vom Mittelpunkt
 - (b) nur in ungekrümmten Räumen: konstanter Peripherie-Winkel
 - (c) Invarianz unter kontinuierlicher Isometrie-Gruppe
 - (d) Invarianz unter allen Spiegelungen an Durchmessern
 - (e) konstante Krümmung
 - (f) vier im Mittelpunkt zusammenfallende Brennpunkte
 - (g) zwei Berührungspunkte an den absoluten Kegelschnitt
9. Es waren einmal drei Brennpunkt-teilende Ellipsen

2 Grundbegriffe

2.1 Der Projektive Raum

Der projektive Raum

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}P^N &= S^N/\text{Antipoden} \\
 &= \mathbb{R}^N \dot{\cup} \mathbb{R}P^{N-1} \\
 &= (\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\}) / (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\
 &= \left\{ \text{1-dimensionale Unterräume des } \mathbb{R}^{N+1} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

ist (zunächst) mit der durch seine doppelte Überlagerung S^N induzierten Metrik versehen und kompakt. Genauso ist

$$\mathbb{R}P^N \subset \mathbb{C}P^N = (\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}) / (\mathbb{C} \setminus \{0\}). \tag{2.2}$$

Speziell erhalten wir die reelle projektive Gerade

$$\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = S^1/\text{Antipoden} \cong S^1 \tag{2.3}$$

als Kreislinie und die komplexe projektive Gerade

$$\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \tag{2.4}$$

als Riemann-Sphäre. Wir zeichnen in $\mathbb{R}P^2$ aber rechnen in $\mathbb{C}P^2$, genauer in projektiven Koordinaten in \mathbb{C}^3 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \sim \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{2.5}$$

Die Zeichenebene ist in der Regel $\{z = 1\}$, so dass die projektive Gerade $\{z = 0\}$ jenseits der Zeichenebene liegt. Wir schreiben auch \mathbb{K} für \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} .

2.2 Punkte und Linien

Punkte

$$0 \neq P = P^k = \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

mit der Äquivalenz $P \sim \lambda P$ bilden die projektive Ebene $\mathbb{K}P^2$, d.h. 1-dimensionale Unterräume des \mathbb{K}^3 . Geraden/Linien sind 2-dimensionale Unterräume des \mathbb{K}^3 , dargestellt als 1-Formen (bei leichtem Missbrauch der Notation), ggf. im Ricci-Kalkül,

$$0 \neq g = \{ P \mid g^T P = 0 \} = g_k = \{ P^k \mid g_k P^k = 0 \}. \quad (2.7)$$

Die Geraden bilden wieder eine projektive Ebene $\mathbb{K}P^2$, dual zur ursprünglichen. In der Tat sind die Begriffe Punkt und Gerade austauschbar.

Inzidenz ist damit bereits erklärt,

$$P \in g \iff g^T P = 0 \iff g_k P^k = 0. \quad (2.8)$$

Je zwei (verschiedene) Geraden schneiden sich in genau einem Punkt,

$$g \cap h \sim g \times h = \varepsilon^{jkl} g_j h_k, \quad (2.9)$$

durch je zwei (verschiedene) Punkte verläuft genau eine Gerade

$$P \times Q = \varepsilon_{jkl} P^j Q^k. \quad (2.10)$$

Hierbei ist $\varepsilon^{jkl} = \varepsilon_{jkl}$ der antisymmetrische Tensor mit $\varepsilon_\pi = \text{sgn } \pi$ für jede Permutation π der Indices, d.h.

$$\varepsilon_{jkl} P^j Q^k R^\ell = \det[PQR] = P^T(Q \times R). \quad (2.11)$$

In der Tat ist stets

$$g^T(g \times h) = \varepsilon^{jkl} g_j g_k h_\ell = \det[ghh] = 0.$$

Übung 2.1 *Der Schnitt konjugiert komplexer Geraden ist — genauso wie die Gerade durch zwei konjugiert komplexe Punkte — reell.*

Drei Punkte P, Q, R sind kollinear, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden liegen, also wenn $\det[PQR] = 0$. Genauso sind drei Geraden g, h, s konkurrent, wenn sie durch einen gemeinsamen Punkt gehen, also ebenfalls wenn $\det[ghs] = 0$.

Jeder Punkt kann auch als 1-Form (genauer (N-1)-Form mit N=2 für die projektive Ebene) und jede 1-Form als Punkt interpretiert werden. Punkte und Geraden (Hyperebenen) der projektiven Ebene (des projektiven Raumes) sind zueinander dual.

Übung 2.2 *Zeige, dass*

$$g \times (P \times Q) \sim (g^T Q)P - (g^T P)Q. \quad (2.12)$$

(In der Tat gilt Gleichheit.) Interpretiere die Terme geometrisch.

2.3 Projektive Abbildungen

Invertierbare lineare Abbildungen $\mathcal{L} : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ induzieren Abbildungen des $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$, die Punkte, Linien und Inzidenz erhalten. Wir werden in Abschnitt 3.4 sogar die Umkehrung beweisen:

Theorem 3.10 (Fundamentalsatz) *Jede Bijektion $\mathcal{L} : \mathbb{R}\mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^N$, $N \geq 2$, die Geraden (d.h. Kollinearität von Punkten) erhält, wird von einer invertierbaren linearen Abbildung $\mathcal{L} \in \text{GL}(N + 1, \mathbb{R})$ induziert.*

Wir definieren projektive Abbildungen als die durch Elemente aus $\text{GL}(N, \mathbb{K})$ induzierten. In der Ebene werden sie durch Vierecke vermittelt:

Theorem 2.3 *Sind 4 Urbildpunkte P, Q, R, S in allgemeiner Lage (d.h. keine 3 kollinear) und 4 Bildpunkte $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{S}$ (ebenfalls keine 3 kollinear) in $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ gegeben, so existiert genau eine projektive Abbildung auf $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$, die die vorgegebenen Punkte auf ihre entsprechenden Bilder abbildet.*

Beweis. (Wähle Vertreter in \mathbb{K}^3 .) O.B.d.A. sind

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Zerlege die gesuchte Abbildung ggf. in zwei Abbildungen mit den obigen speziellen Punkten als Zwischenschritt.) Der Ansatz

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \lambda \tilde{P} & \mu \tilde{Q} & \nu \tilde{R} \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu, \nu \neq 0,$$

liefert

$$\mathcal{L} S = \tilde{S} \iff \begin{pmatrix} \tilde{P} & \tilde{Q} & \tilde{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \tilde{S}.$$

Nun ist $\det[\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}] \neq 0$ nach Voraussetzung, also gibt es eine (bis auf Skalierung) eindeutige Lösung $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}\mathbb{P}^2$. \(\boxtimes\)

Übung 2.4 *Die durch $\mathcal{L} \in \text{GL}(3, \mathbb{K})$ auf den Geraden der projektiven Ebene induzierte Abbildung ist durch ihre inverse Transponierte gegeben, d.h.*

$$P \mapsto \mathcal{L}P, \quad g \mapsto \mathcal{L}^{-T}g. \tag{2.13}$$

2.4 Die projektive Gerade

Die Geraden der projektiven Ebene sind selbst wieder projektive Räume,

$$\begin{aligned} \mathbb{K}P^1 &= (\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}) / (\mathbb{K} \setminus \{0\}) \\ &\cong \left\{ \lambda P + \mu Q \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}P^1 \right\}, \quad P \not\sim Q. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die projektiven Abbildungen werden wieder durch invertierbare lineare Abbildungen $\mathcal{L} \in \text{GL}(2, \mathbb{K})$ induziert. Wählen wir Repräsentanten $P = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$, so sind dies die Möbius-Transformationen

$$p \mapsto \frac{ap + b}{cp + d}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

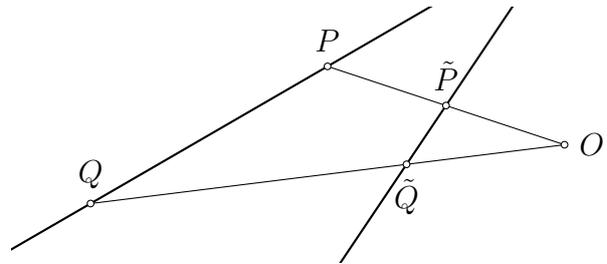
Theorem 2.5 *Sind 3 paarweise verschiedene Urbildpunkte P, Q, R und 3 Bildpunkte $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}$ (ebenfalls paarweise verschieden) in $\mathbb{K}P^1$ gegeben, so existiert genau eine projektive Abbildung auf $\mathbb{K}P^1$, die die vorgegebenen Punkte auf ihre entsprechenden Bilder abbildet.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum entsprechenden Satz 2.3 für die Ebene. \boxtimes

Wählen wir zwei verschiedene Punkte $P, Q \in g$ einer projektiven Geraden g , genauer feste Vertreter $P, Q \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$, so finden wir die baryzentrischen Koordinaten

$$\mathbb{K}P^1 \cong \left\{ \lambda P + \mu Q \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}P^1 \right\}. \quad (2.16)$$

Der Koordinatenwechsel zu zwei anderen Bezugspunkten $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \tilde{g}$ ist eine projektive Abbildung. Betrachte dazu homogene Koordinaten mit Ursprung O außerhalb der Geraden. (Im Fall $g \sim \tilde{g}$ nutze eine weitere Gerade $h \not\sim g$ als Zwischenschritt.)



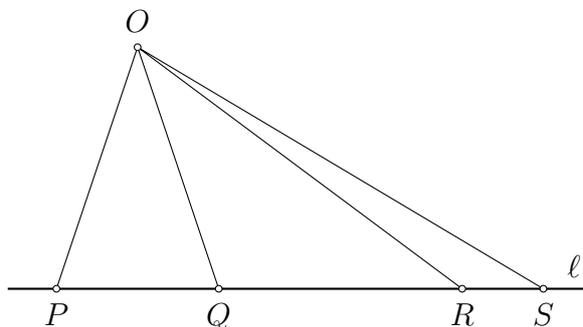
2.5 Doppelverhältnisse

Das Doppelverhältnis zweier (geordneter) Punktepaare auf der projektiven Geraden ist über die Determinanten ihrer homogenen Koordinaten oder die Vorzeichen-behafteten (euklidischen) Abstände in einer beliebigen Projektion definiert:

$$(P, Q; R, S) := \frac{\det[PR] \det[QS]}{\det[PS] \det[QR]} = \frac{P - R}{P - S} \Big/ \frac{Q - R}{Q - S}. \quad (2.17)$$

In der Tat ist das Doppelverhältnis unabhängig

- von der Wahl der Vertreter der Punkte, d.h. der Skalierung ihrer Koordinaten;
- von der Wahl des Ursprungs O in \mathbb{K}^2 ;
- von der Wahl der Projektion, d.h. der Linie ℓ ;
- (und folglich) von beliebigen projektiven Transformationen der projektiven Geraden.



Vertauschung der Punkte liefert:

$$\begin{aligned}
 (P, Q; R, S) &= (R, S; P, Q) && \text{(Tausch der Paare),} \\
 &= 1/(P, Q; S, R) && \text{(Tausch innerhalb eines Paares),} \\
 &= 1 - (P, R; Q, S) && \text{(Tausch zwischen den Paaren).}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

(Für die letzte Gleichung wähle o.B.d.A. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.) Insbesondere gilt

$$(P, Q; R, S) = 1 \quad \Rightarrow \quad P \sim Q \text{ oder } R \sim S. \tag{2.19}$$

Ist die projektive Gerade als Linie ℓ in der projektiven Ebene gegeben, so kann das Doppelverhältnis auch über die Determinanten bezüglich eines beliebigen Zentrums $O \in \mathbb{K}P^2 \setminus \ell$ ausgedrückt werden,

$$(P, Q; R, S) = \frac{\det[OPR] \det[OQS]}{\det[OPS] \det[OQR]}. \tag{2.20}$$

Der Ausdruck ist nach wie vor unabhängig von projektiven Transformationen der Ebene und der Wahl des Punktes $O \notin \ell$. Analog kann das Doppelverhältnis zweier Paare konkurrierender Geraden definiert werden.

Übung 2.6 Definiere das Doppelverhältnis zweier Paare $(P, q), (R, s)$ aus Punkt und Gerade durch

$$(P, q; R, s) := 1 - \frac{q^T P \ s^T R}{s^T P \ q^T R} = 1 - \frac{P^k q_k R^\ell s_\ell}{P^\ell q_k R^k s_\ell}. \tag{2.21}$$

Zeige, dass dies mit dem Doppelverhältnis $(P, Q; R, S)$ übereinstimmt, sofern Q, S die Schnittpunkte von q, s mit der Geraden durch P und R bezeichnen. Diskutiere Symmetrieeigenschaften. Bringe insbesondere den Tausch

$$(P, q; R, s) = 1 - \frac{1}{1 - (P, s; R, q)}$$

zwischen den Paaren in Einklang mit (2.18).

Übung 2.7 Definiere das Doppelverhältnis eines Punktepaars (P, Q) und eines Geradenpaars (r, s) durch

$$(P, Q; r, s) := \frac{r^T P s^T Q}{s^T P r^T Q} = \frac{P^k Q^\ell r_k s_\ell}{P^\ell Q^k r_k s_\ell}. \quad (2.22)$$

Zeige, dass dies mit dem Doppelverhältnis $(P, Q; R, S)$ übereinstimmt, sofern R, S die Schnittpunkte von r, s mit der Geraden durch P und Q bezeichnen. Diskutiere Symmetrieeigenschaften.

Übung 2.8 Ersetze in (2.22) die Geraden r, s durch

$$\tilde{r} := r + \lambda(P \times Q), \quad \tilde{s} := s + \mu(P \times Q)$$

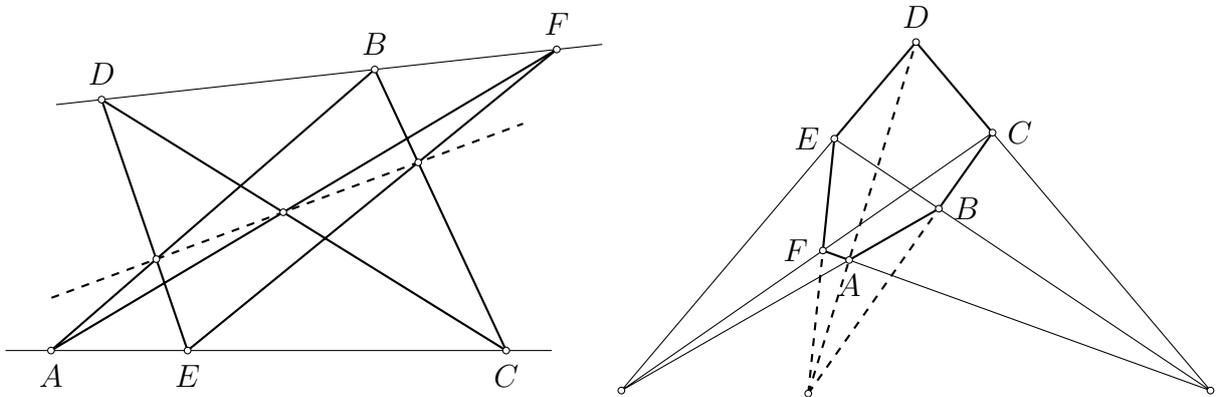
und vergleiche dies mit der Wahl eines anderen Zentrums O in (2.20). Zeige so, dass (2.20) tatsächlich unabhängig von O ist.

Ist ihr Doppelverhältnis -1 , so nennt man die (ungeordneten) Punktepaare bzw. Geradenpaare auch *harmonisch*. Harmonische Verhältnisse spielen in Kapitel 3 eine tragende Rolle.

2.6 Der Satz von Pappos

Theorem 2.9 (Pappos von Alexandria) Liegen die Ecken $ABCDEF$ eines (ebenen, überschlagenen) Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, so schneiden sich die Paare gegenüberliegender Seiten in drei kollinearen Punkten. (www.stefan-liebscher.de/geometry)

Alternative, selbst-duale Version: Verlaufen in einem Sechseck zwei Diagonalen durch die Schnittpunkte der jeweilig gegenüberliegenden Seiten, so ist auch die dritte Diagonale zu den beiden ihr gegenüberliegenden Seiten konkurrent.



Beweis. Wir setzen die allgemeine Lage der Punkte voraus. Die vorausgesetzten Kollinearitäten können wir in Determinanten ausdrücken:

$$\det[AEC] = \det[DBF] = 0.$$

Der Schnittpunkt zweier durch je zwei Punkte gegebenen Geraden, z.B. \overline{AB} und \overline{DE} ist gegeben durch

$$(A \times B) \times (D \times E) \sim \det[ABE]D - \det[ABD]E.$$

Diese Darstellung geht auf Plücker zurück, vergleiche auch (2.12). (Die Kollinearität mit A, B bzw. C, D kann direkt getestet werden.) Die behauptete Kollinearität der Schnittpunkte kann erneut als Determinantengleichung ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} 0 = & [ABE][CDA][EFC][DFB] - [ABE][CDA][EFB][DFC] \\ & - [ABE][CDF][EFC][DAB] + [ABE][CDF][EFB][DAC] \\ & - [ABD][CDA][EFC][EFB] + [ABD][CDA][EFB][EFC] \\ & + [ABD][CDF][EFC][EAB] - [ABD][CDF][EFB][EAC] \end{aligned}$$

Diese Identität folgt direkt aus der Voraussetzung. Beachte dabei die drei Paare sich aufhebender Terme.

Etwas kürzer und eleganter ist der Beweis in der alternativen Formulierung. Aus den Voraussetzungen

$$\begin{aligned} 0 &= [EDB][AFC] - [EDA][BFC], \\ 0 &= [AFD][CBE] - [AFC][DBE] \end{aligned}$$

folgt durch Addition ohne Umschweife die Behauptung

$$0 = [CBF][EDA] - [CBE][FDA].$$

Die Äquivalenz beider Formulierungen erkennt man z.B., indem man in der Originalversion F, C durch ihre Diagonalepunkte ersetzt und D, E vertauscht. \boxtimes

Übung 2.10 Zeige, dass

$$(A \times B) \times (D \times E) = \det[ABE]D - \det[ABD]E \quad (2.23)$$

(mit Koeffizient 1), z.B. im Ricci Kalkül.

Übung 2.11 Für beliebige Vektoren $P_1, \dots, P_{n-1}, Q_1, \dots, Q_{n+1} \in \mathbb{K}^n$ gilt die Graßmann-Plücker-Relation

$$0 = \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^\ell \det[P_1 \cdots P_{n-1} Q_\ell] \det[Q_1 \cdots Q_{\ell-1} Q_{\ell+1} \cdots Q_{n+1}] =: \psi. \quad (2.24)$$

Diese kann bewiesen werden, indem man ψ als alternierende Multilinearform in den Q_ℓ auffasst. Als alternierende $(n+1)$ -Form auf \mathbb{K}^n muss sie identisch verschwinden. Betrachte stattdessen die Fälle $n = 2, 3$ in der Form

$$\begin{aligned} 0 &= [OPQ_1][OQ_2Q_3] - [OPQ_2][OQ_1Q_3] + [OPQ_3][OQ_1Q_2], \\ 0 &= [P_1P_2Q_1][Q_2Q_3Q_4] - [P_1P_2Q_2][Q_1Q_3Q_4] + \\ &\quad + [P_1P_2Q_3][Q_1Q_2Q_4] - [P_1P_2Q_4][Q_1Q_2Q_3]. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Interpretiere die erste Relation als Eigenschaft des Doppelverhältnisses (2.18) und die zweite Relation als Mehrdeutigkeit bei der Bildung des Spatproduktes:

$$\begin{aligned} \det[P_1 \times P_2, Q_1 \times Q_2, Q_3 \times Q_4] &= (P_1 \times P_2)^T((Q_1 \times Q_2) \times (Q_3 \times Q_4)) \\ &= \det[P_1, P_2, (Q_1 \times Q_2) \times (Q_3 \times Q_4)] \\ \det[P_1 \times P_2, Q_1 \times Q_2, Q_3 \times Q_4] &= (Q_3 \times Q_4)^T((P_1 \times P_2) \times (Q_1 \times Q_2)) \\ &= \det[Q_3, Q_4, (P_1 \times P_2) \times (Q_1 \times Q_2)]. \end{aligned}$$

Vergleiche mit (2.12) und (2.23).

3 Vollständige Vierecke & harmonische Verhältnisse

3.1 Projektive Involutionen

Involutionen sind selbstinverse Abbildungen („Wurzeln“ der Identität), d.h. (für uns) lineare bzw. projektive Abbildungen $\mathcal{R} : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3, \mathbb{K}P^2 \rightarrow \mathbb{K}P^2$, so dass $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} \sim \mathcal{I}$. O.B.d.A. also tatsächlich $\mathcal{R}^2 = \mathcal{I}$. Als Eigenwerte kommen dann nur ± 1 in Frage. Außerdem muss \mathcal{R} diagonalisierbar sein. (Betrachte, dass eine reelle Matrix \mathcal{R} in ungerader Dimension nicht $\mathcal{R}^2 = -\mathcal{I}$ erfüllen kann, also ist sie sogar reell diagonalisierbar.) Ist $\mathcal{R} \not\sim \mathcal{I}$ so bleibt nur

$$\mathcal{S}\mathcal{R}\mathcal{S}^{-1} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Die Fixpunkte von \mathcal{R} in $\mathbb{K}P^2$ bilden eine Gerade und einen isolierten Punkt. Projektive Involutionen sind daher bestimmt durch

$$\text{Spiegel(ungsgerade)} \quad m = \mathcal{S}^{-T}e_3 \quad \text{und (Spiegel-)Zentrum} \quad M = \mathcal{S}e_3, \tag{3.2}$$

die (punktweise) festgehalten werden. Umgekehrt gibt es zu gegebenem Paar aus Spiegel m und Zentrum $M \notin m$ genau eine projektive Involution $\mathcal{R} \not\sim \mathcal{I}$, die beide (punktweise) festhält, nämlich

$$\mathcal{R} = \text{Invol}(M, m) := (m^T M)\mathcal{I} - 2Mm^T, \quad \mathcal{R}_\ell^k = m_j M^j \delta_\ell^k - 2M^k m_\ell. \tag{3.3}$$

In Kapitel 5 werden ausgewählte Involutionen die Geometrien erzeugen.

Übung 3.1 *Zeige, dass (3.3) tatsächlich eine Involution definiert, die M und m punktweise festhält. Euklidische Punkt- und Geradenspiegelungen sind ebenfalls Involutionen. Wo ist der Spiegel der Punktspiegelungen und wo das Zentrum der Geradenspiegelungen?*

Die projektive Involution \mathcal{R} lässt Geraden g durch ihr Zentrum M (als Geraden) fest, $\mathcal{R}^{-T}g \sim g$, und induziert auf ihnen somit projektive Involutionen des $\mathbb{K}P^1 \cong g$. Diese haben zwei Fixpunkte (M und $G = g \cap m$). Doppelverhältnisse bleiben unter projektiven Abbildungen erhalten, somit gilt für $P \in g \setminus \{M, G\}$:

$$(M, G; P, \mathcal{R}P) = (M, G; \mathcal{R}P, \mathcal{R}^2P) = (M, G; \mathcal{R}P, P) = 1/(M, G; P, \mathcal{R}P),$$

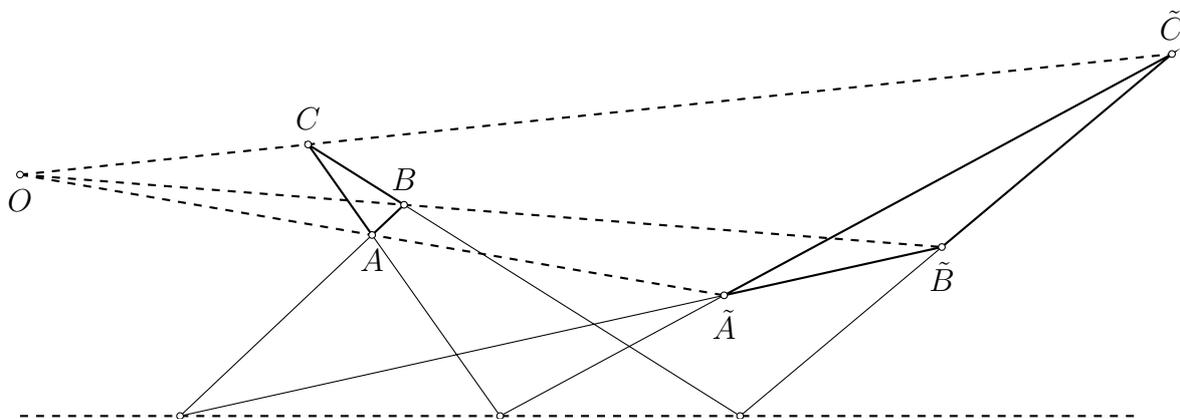
siehe (2.18, 2.19). Da $P \neq \mathcal{R}P$ und $M \neq G$ gilt, liegen also Urbild und Bild unter einer projektiven Involution der projektiven Gerade stets harmonisch zum Fixpunktpaar.

Übung 3.2 Sei \mathcal{L} eine projektive Abbildung der projektiven Geraden, die zwei verschiedene Punkte vertauscht: $\mathcal{L}P = \tilde{P} \neq P = \mathcal{L}\tilde{P}$. Zeige, dass \mathcal{L} dann eine Involution ist.

3.2 Der Satz von Desargues

Theorem 3.3 (Desargues) Gegeben seien zwei Dreiecke A, B, C und $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ in der projektiven Ebene. Sind die drei Verbindungslinien einander entsprechender Ecken konkurrent, so schneiden sich einander entsprechende Seiten in drei kollinearen Punkten. Die Umkehrung gilt ebenfalls. (www.stefan-liebscher.de/geometry)

Alternative Formulierung: Zwei Dreiecke sind genau dann bezüglich eines Punktes in Perspektive, wenn sie bezüglich einer Gerade in Perspektive liegen.

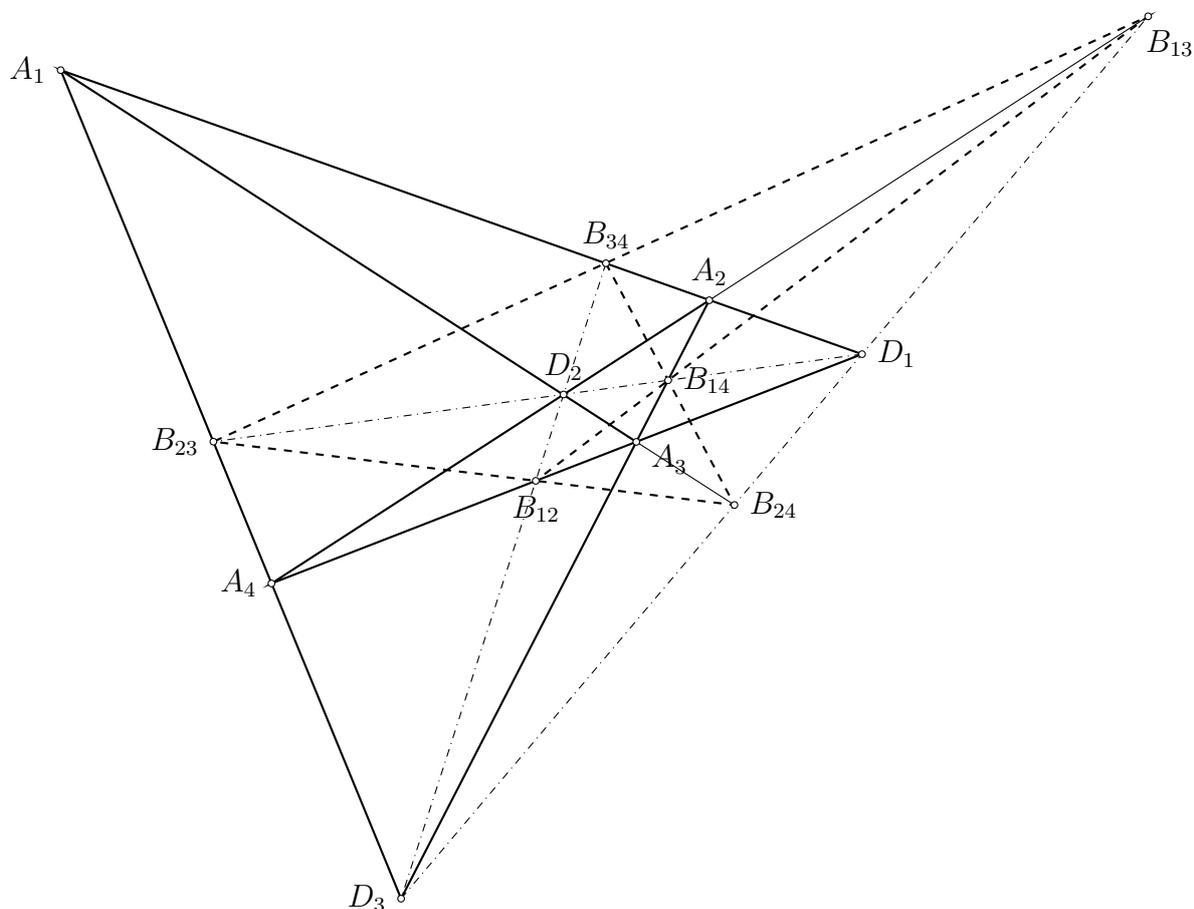


Beweis. Wir setzen die allgemeine Lage der Punkte voraus. Sei O der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $A \times \tilde{A}$, $B \times \tilde{B}$, $C \times \tilde{C}$. Wir betten die Konstruktion in den $\mathbb{K}P^3$ ein, d.h. wir betrachten die Dreiecke als zwei ebene Schnitte durch eine dreiseitige Pyramide, projiziert in die Ebene. Der Punkt O ist die Projektion der Pyramidenspitze. In der Tat sichert die Voraussetzung, dass die Pyramidenseiten eben sind, also schneiden sich einander entsprechende Dreiecksseiten auch im $\mathbb{K}P^3$. Die drei Schnittpunkte liegen nun in der Schnittgeraden der beiden Schnittebenen, deren Projektion die Behauptung liefert. Die Umkehrung ist wieder Ausdruck der Dualität von Punkten und Geraden der projektiven Ebene. \boxtimes

Übung 3.4 Beweise den Satz von Desargues, indem Du die Konkurrenz- und Kollinearitätsaussagen als Determinantenbeziehung ausdrückst, vgl. Abschnitt 2.6.

Übung 3.5 Wann gibt es eine projektive Involution, die zwei gegebene Dreiecke ineinander abbildet?

3.3 Vierecke & Vierseite



Ein vollständiges Viereck besteht aus vier Eckpunkten A_1, \dots, A_4 in allgemeiner Lage (d.h. keine 3 kollinear) und sechs Seiten. Die Paare gegenüberliegender Seiten (die keine Ecke gemeinsam haben) schneiden sich in drei Diagonalpunkten D_1, D_2, D_3 .

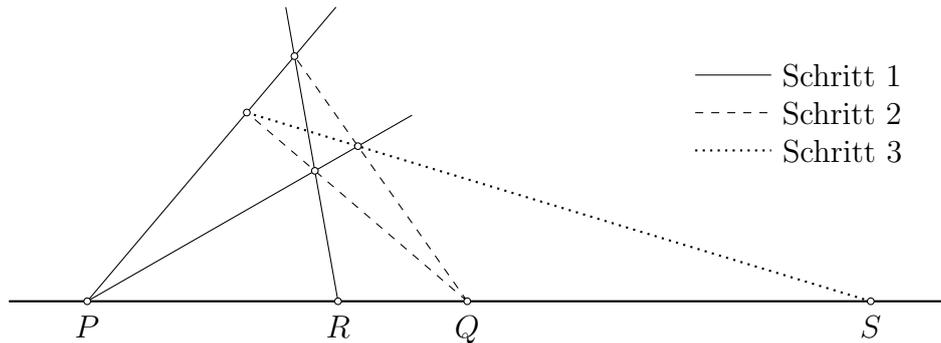
Die Seiten des Diagonaldreiecks schneiden die Seiten des Vierecks in jeweils zwei weiteren Punkten, B_{12}, \dots, B_{34} . Nach dem Satz von Desargues liegen diese sechs Punkte auf vier Geraden (mit jeweils 3 Punkten). Diese bilden also ein vollständiges Vierseit (aus vier Seiten und sechs Ecken). Dieses vollständige Vierseit ist das duale Gegenstück zum vollständigen Viereck, wobei Diagonaldreieck und Diagonaldreieck übereinstimmen.

Das Bild eines Vierecks legt eine projektive Abbildung fest. Die Vertauschung zweier Ecken definiert also eine projektive Involution. Diese bildet das Gesamt-Arrangement auf sich ab und liefert dadurch eine Vielzahl harmonischer Verhältnisse.

Übung 3.6 Insbesondere stehen auf jeder Diagonalen die beiden Diagonalpunkte zu den beiden Ecken des Vierseits in harmonischem Verhältnis. In jedem Diagonalpunkt stehen

die beiden Diagonalen zu den beiden Seiten des Vierecks in harmonischem Verhältnis. Auf jeder Seite des Vierecks liegen die beiden Ecken des Vierecks harmonisch zu Diagonale und Ecke des Vierecks. In jeder Ecke des Vierecks liegen die beiden Seiten des Vierecks harmonisch zu Diagonale und Seite des Vierecks.

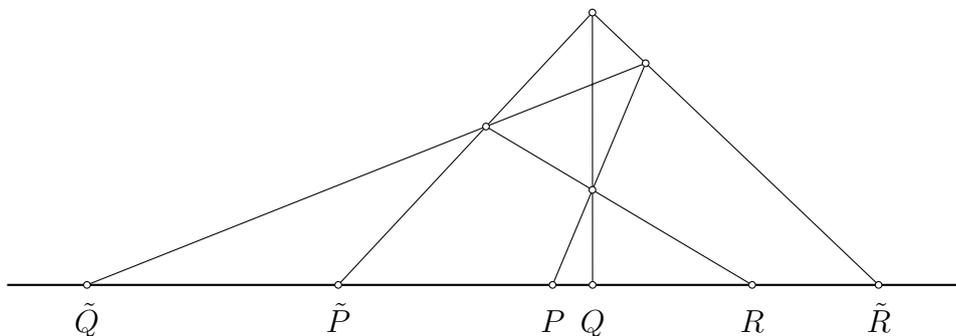
Sind zwei Punkte P, Q gegeben, so kann jeder weitere kollineare Punkt R mittels eines vollständigen Vierecks (allein mit dem Lineal) harmonisch ergänzt werden.



Übung 3.7 Aufgrund von Theorem 2.3 gibt es bis auf projektive Abbildungen nur ein Viereck in allgemeiner Lage. Treffe eine geeignete Wahl der Ausgangspunkte und bestimme die Seiten des Vierecks sowie Diagonaldreieck und duales Vierseit algebraisch. Berechne schließlich die auftretenden harmonischen Verhältnisse.

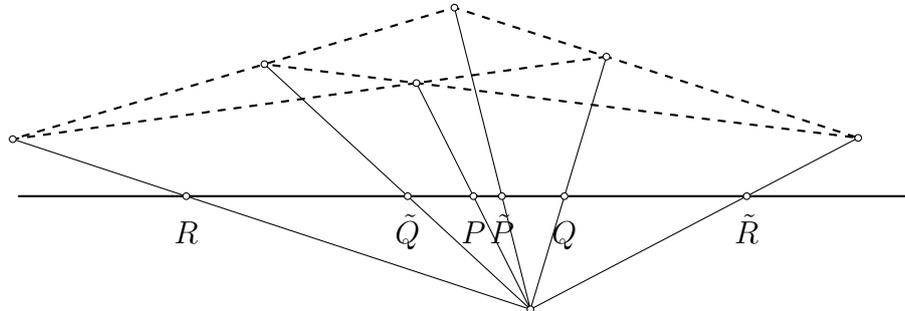
Übung 3.8 Schneiden wir die Seiten eines vollständigen Vierecks mit einer weiteren Geraden, so bilden die Schnittpunkte ein Tripel von Paaren, das wir Vierecksmenge (quadrilateral set) nennen. (Die Paare entsprechen gegenüberliegenden Seiten des Vierecks.) Zeige, dass $(P, \tilde{P}; Q, \tilde{Q}; R, \tilde{R})$ in \mathbb{RP}^1 genau dann eine Vierecksmenge bilden, wenn gilt:

$$[P\tilde{Q}][Q\tilde{R}][R\tilde{P}] = [P\tilde{R}][Q\tilde{P}][R\tilde{Q}] \tag{3.4}$$



Zeige, dass im Spezialfall $P = \tilde{P}, Q = \tilde{Q}$ die Paare $(P, Q; R, \tilde{R})$ harmonisch sind.

Übung 3.9 Zeige, dass die auf eine Gerade projizierten Ecken eines vollständigen Vierseits ebenfalls eine Vierecksmenge bilden.



3.4 Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie

Inzidenzerhaltende Abbildungen der projektiven Ebene bilden vollständige Vierecke auf ebensolche ab. Also bilden sie harmonische Punkte auf ebensolche ab. Auf jeder Geraden induzieren sie eine *harmonische* Abbildung, die harmonische Verhältnisse aufrechterhält.

Theorem 3.10 (Fundamentalsatz) Jede Bijektion $\mathcal{L} : \mathbb{RP}^N \rightarrow \mathbb{RP}^N$, $N \geq 2$, die Geraden (d.h. Kollinearität von Punkten) erhält, wird von einer invertierbaren linearen Abbildung $\mathcal{L} \in \text{GL}(N + 1, \mathbb{R})$ induziert.

Beweis. Wir werden den Beweis für die Ebene, $N = 2$ führen. Sei \mathcal{L} also eine Kollineation, d.h. eine Bijektion, die Kollinearität erhält. O.B.d.A. halte \mathcal{L} die Punkte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

fest (dies kann durch eine lineare Abbildung erreicht werden, siehe Satz 2.3. Also bleiben auch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

fest. Auf den Achsen $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ induziert \mathcal{L} also jeweils harmonische Abbildungen, die in der Standard-Koordinatisierung jeweils die Punkte

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

festhalten. Wir werden im Anschluss zeigen, dass das nur die Identität kann. Hält \mathcal{L} aber beide Achsen punktweise fest, so ist \mathcal{L} bereits die Identität — und der Satz bewiesen.

Sei nun also \mathcal{L} eine harmonische Abbildung der reellen projektiven Gerade \mathbb{RP}^1 , die $\underline{0}, \underline{1}, \underline{\infty}$ festhält. Wir müssen noch zeigen, dass $\mathcal{L} = \mathcal{I}$. Zunächst bilden wir projektive Punkte auf reelle Zahlen vermöge ihres Doppelverhältnisses zu den drei Fixpunkten ab:

$$\mathcal{R} : \mathbb{RP}^1 \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad P \mapsto (\underline{0}, \underline{\infty}; P, \underline{1}), \quad \mathcal{R}a := \mathcal{R}\left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = a.$$

Die induzierte Abbildung $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wollen wir als Körper-Automorphismus identifizieren. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} -1 &= (\underline{0}, \underline{\infty}; a, \underline{b}) && \iff && b &= -a, \\ -1 &= (\underline{1}, \underline{\infty}; a, \underline{b}) && \iff && b &= 2 - a, \\ -1 &= (\underline{c}, \underline{\infty}; a, \underline{b}) && \iff && c &= \frac{1}{2}(a + b), \\ -1 &= (\underline{c}, \underline{\infty}; \underline{0}, \underline{d}) && \iff && d &= 2c, \\ -1 &= (\underline{1}, \underline{b}; a, \underline{-a}) && \iff && b &= a^2, \end{aligned}$$

Da \mathcal{L} harmonische Verhältnisse erhält, vertauscht $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}^{-1}$ mit Addition und Multiplikation. (Beachte für die Multiplikation die binomische Formel: $2ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2$.)

Insbesondere lässt $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}^{-1}$ zunächst die natürlichen Zahlen und dann auch die rationalen Zahlen fest. Aufgrund der totalen Ordnung von \mathbb{R} ist $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}^{-1}$ auch monoton, also $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{L} = \mathcal{I}$, wie behauptet. \bowtie

Kollineationen entsprechen im Allgemeinen semilinearen Abbildungen, d.h. bis auf Körperautomorphismen linearen Abbildungen. Beachte insbesondere den Automorphismus $z \mapsto \bar{z}$ der komplexen Zahlen.

4 Kegelschnitte

4.1 Quadratische Formen

Bisher haben wir Punkte und Geraden als Nullstellengebilde von Linearformen untersucht. Die Nullstellengebilde von quadratischen Formen nennen wir Kegelschnitte, die wir (bei leichtem Missbrauch der Notation) schreiben als

$$0 \neq \mathcal{C} = \{ P \mid \mathcal{C}[P] = P^T \mathcal{C} P = 0 \} = \mathcal{C}_{k\ell} = \{ P^k \mid \mathcal{C}_{k\ell} P^k P^\ell = 0 \}, \quad (4.1)$$

mit o.B.d.A. symmetrischer Matrix \mathcal{C} . Der Kegelschnitt \mathcal{C} kann durch eine projektive Transformation $\mathcal{L}^{-1} \in \text{GL}(3)$ auf seine Normalform (vergleiche Anhang A)

$$\mathcal{L}^T \mathcal{C} \mathcal{L} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.2)$$

gebracht werden. Der erste Fall beschreibt einen Kreiskegel in \mathbb{K}^3 , der durch unsere Zeichenebene $\{z = 1\}$ in einem Kreis geschnitten wird. Seine projektiven Bilder sind tatsächlich Kegelschnitte, was den Namen für quadratische Formen rechtfertigt. Der zweite Fall ist ein reeller Kegelschnitt ($\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$) ohne reelle Punkte. Die restlichen drei Fälle sind singuläre Kegelschnitte. Sie bilden ein Paar reeller Geraden, ein Paar konjugiert komplexer Geraden mit reellem Schnittpunkt, bzw. eine reelle (Doppel-)Gerade.

Proposition 4.1 *Schneidet eine Gerade einen Kegelschnitt in mehr als zwei Punkten, so ist der Kegelschnitt singulär und die Gerade ganz im Kegelschnitt enthalten. In der komplexen projektiven Ebene ist der Schnitt nicht leer.*

Beweis. Sei $g \sim P \times Q$ die Gerade und \mathcal{C} der Kegelschnitt, d.h. die den Kegelschnitt bestimmende symmetrische Matrix. Ein Punkt $\lambda P + \mu Q \in g$ liegt genau dann auf dem Kegelschnitt, wenn $\mathcal{C}[\lambda P + \mu Q] = 0$ ist, d.h. wenn

$$0 = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{C}[P] & P^T \mathcal{C} Q \\ Q^T \mathcal{C} P & \mathcal{C}[Q] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} =: \tilde{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Sind $P, Q \in \mathcal{C}$, so $\mathcal{C}[P] = \mathcal{C}[Q] = 0$ und (4.3) ist äquivalent zu $0 = \lambda\mu \det \tilde{\mathcal{C}}$. Sei nun also $P \notin \mathcal{C}$, d.h. $\mathcal{C}[P] \neq 0$. Dann stellt (4.3) eine quadratische Gleichung in λ/μ mit Diskriminante $\det(\tilde{\mathcal{C}}/\mathcal{C}[P])$ dar.

Falls $\det \tilde{\mathcal{C}} \neq 0$, so finden wir zwei verschiedene (projektive) Schnittpunkte $g \cap \mathcal{C}$ (die für Geraden und Kegelschnitte der reellen projektiven Ebene konjugiert komplex

sein können). Ist hingegen $\det \tilde{\mathcal{C}} = 0$, so finden wir einen Schnittpunkt (den wir doppelt zählen können), oder es ist $g \subset \mathcal{C}$. \boxtimes

Haben eine Gerade g und ein regulärer Kegelschnitt \mathcal{C} ($\det \mathcal{C} \neq 0$) genau einen Punkt gemeinsam, so nennen wir g eine *Tangente* an \mathcal{C} .

Proposition 4.2 *Ist \mathcal{C} ein regulärer Kegelschnitt ($\det \mathcal{C} \neq 0$) und $P \in \mathcal{C}$, so ist die Tangente in P an \mathcal{C} gegeben durch $t_P := \mathcal{C}P$. Ferner ist $\{t \mid \mathcal{C}^{-1}[t] = 0\}$ die Menge aller Tangenten an \mathcal{C} , d.h. die Tangenten an einen Kegelschnitt bilden wieder einen (dualen) Kegelschnitt, der durch die inverse Matrix gegeben ist.*

Beweis. Zunächst ist $t_P^T P = \mathcal{C}[P] = 0$, also $P \in t_P$. Sei $Q \not\in t_P$ ein beliebiger Punkt. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung (4.3), $\det \tilde{\mathcal{C}} = -(t_P^T Q)^2$, ist genau dann Null, wenn $Q \in t_P$. Also ist t_P die eindeutige Tangente in P an \mathcal{C} . Die Menge $\{t_P \mid \mathcal{C}[P] = 0\}$ aller Tangenten bildet wegen

$$P^T \mathcal{C} P = 0 \iff P^T \mathcal{C} \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} P = 0 \iff t_P^T \mathcal{C}^{-1} t_P = 0$$

schließlich den dualen Kegelschnitt. \boxtimes

Statt der inversen Matrix kann natürlich auch ein skalares Vielfaches benutzt werden, z.B. die Adjunkte (transponierte Kofaktor-Matrix):

$$2\mathcal{C}^{\Delta \ell k} = \varepsilon^{kij} \varepsilon^{lmn} \mathcal{C}_{im} \mathcal{C}_{jn}, \quad \mathcal{C} \mathcal{C}^{\Delta} = (\det \mathcal{C}) \mathcal{I}. \quad (4.4)$$

In der Tat wollen wir die Adjunkte zur Desingularisierung der singulären Kegelschnitte und zur Verallgemeinerung des Tangentenbegriffs nutzen.

Proposition 4.3 *Hat eine symmetrische Matrix $\mathcal{C} \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$ den Rang 2, so zerfällt der zugehörige singuläre Kegelschnitt in zwei verschiedene Geraden $g \not\sim h$,*

$$\mathcal{C} \sim gh^T + hg^T. \quad (4.5)$$

Ihre Adjunkte hat den Rang 1,

$$\mathcal{C}^{\Delta} \sim FF^T, \quad F \sim g \times h \sim g \cap h. \quad (4.6)$$

Dabei sind für reelle \mathcal{C} die Geraden entweder auch reell oder konjugiert komplex (also mit reellem Schnitt).

Beweis. Sei die Matrix o.B.d.A. in Normalform (4.2) gegeben.

$$2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{i} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Aussage ist dann offensichtlich. \boxtimes

Übung 4.4 Sei $P = P^k$ ein Punkt der projektiven Ebene. Sei \mathcal{X}_P die schiefsymmetrische Matrix, so dass für alle Q gilt: $\mathcal{X}_P Q = P \times Q$, d.h.

$$\mathcal{X}_P = \begin{pmatrix} 0 & -P^3 & P^2 \\ P^3 & 0 & -P^1 \\ -P^2 & P^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X}_{P^j \ell} := \varepsilon_{jkl} P^k. \quad (4.7)$$

Sei nun $\mathcal{C} = gh^T + hg^T$ und $F = g \times h$ wie in Proposition 4.3 (mit Koeffizienten 1). Zeige

$$\mathcal{X}_F = \mathcal{X}_{(g \times h)} = hg^T - gh^T,$$

also auch

$$2hg^T = \mathcal{C} + \mathcal{X}_F.$$

Zeige ferner, dass F durch die Adjunkte gegeben ist:

$$\mathcal{C}^\Delta = -FF^T.$$

(Beachte den Koeffizienten 1.) Formuliere damit einen Algorithmus, der eine symmetrische (3×3) -Matrix vom Rang 2 in das sie erzeugende Paar projektiver Geraden zerlegt.

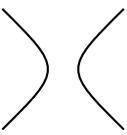
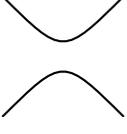
Definition 4.5 Kegelschnitte sind gegeben durch Paare von Null verschiedener, symmetrischer Matrizen $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta) = (\mathcal{C}_{kl}, \mathcal{C}^{k\ell})$, mit

$$\begin{aligned} \det \mathcal{C} &\neq 0, & \det \mathcal{C}^\Delta &\neq 0, & \mathcal{C}\mathcal{C}^\Delta &\sim \mathcal{I}, & \text{oder} \\ \det \mathcal{C} &= 0, & \det \mathcal{C}^\Delta &= 0, & \mathcal{C}\mathcal{C}^\Delta &= 0. \end{aligned}$$

Die Punkte und Tangenten des Kegelschnitts sind gegeben durch

$$\{ P \mid \mathcal{C}[P] = 0 \}, \quad \{ t \mid \mathcal{C}^\Delta[t] = 0 \}.$$

Insbesondere haben beide Matrizen vollen Rang oder eine Matrix hat Rang 1 und die andere Rang 1 oder 2. Hat \mathcal{C}^Δ den Rang 2, so ist ungeachtet der Notation \mathcal{C} ein Vielfaches der Adjunkten von \mathcal{C}^Δ und hat Rang 1. (Die Adjunkte von \mathcal{C} ist Null.) Die duale Matrix desingularisiert die zu (Doppel-)Geraden entarteten Kegelschnitte, indem sie die Tangentenschar beschreibt. In Normalform finden wir folgende [Typen von Kegelschnitten](#):

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 
Regulärer Kegelschnitt ohne reelle Punkte oder Tangenten	reelle Gerade, zwei konjugiert komplexe Tangentenbüschel	Regulärer Kegelschnitt
$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">◦</p>	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 
zwei konjugiert komplexe Geraden, ein Tangentenbüschel	eine reelle Gerade, ein reelles Tangentenbüschel	zwei reelle Geraden, ein reelles Tangentenbüschel
$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 
Regulärer Kegelschnitt	eine reelle Gerade, zwei reelle Tangentenbüschel	Regulärer Kegelschnitt

Übung 4.6 *Induziert $\mathcal{L} \in \text{GL}(3, \mathbb{K})$ eine projektive Abbildung (der Punkte) der projektiven Ebene $\mathbb{K}P^2$ — vergleiche (2.13) — so operiert sie auf den Kegelschnitten als*

$$(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta) \mapsto (\mathcal{L}^{-T} \mathcal{C} \mathcal{L}^{-1}, \mathcal{L} \mathcal{C}^\Delta \mathcal{L}^T). \quad (4.8)$$

Übung 4.7 *Sei $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ ein (zunächst regulärer) Kegelschnitt und P ein beliebiger Punkt (nicht notwendig auf \mathcal{C}). Dann ist $\mathcal{C}^\Delta[P \times Q] = 0$ genau dann, wenn Q auf einer Tangenten an \mathcal{C} durch P liegt. Also ist $\mathcal{X}_P^T \mathcal{C}^\Delta \mathcal{X}_P$ ein singulärer Kegelschnitt, der genau in das*

Tangentenpaar an \mathcal{C} durch P zerfällt, vergleiche Proposition 4.3. Formuliere einen Algorithmus, der die Tangenten an einen Kegelschnitt durch einen gegebenen Punkt bestimmt. Formuliere einen (dualen) Algorithmus, der Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitt bestimmt. Was passiert für singuläre Kegelschnitte?

Übung 4.8 Betrachte \mathbb{RP}^3 mit der von S^3 induzierten Metrik. Diskutiere die stetige Abhängigkeit der Kegelschnitte als Punktmengen (mit symmetrischem Hausdorff-Abstand) und der Kegelschnitte als Matrizenpaare (z.B. nach geeigneter Normierung bzgl. der Operatornorm).

Übung 4.9 Diskutiere die Topologie des Raumes der (reellen) Kegelschnitte. Beschreibe, wie der Raum der Kegelschnitte entsteht, indem im Raum \mathbb{RP}^5 der (projektiven) symmetrischen Matrizen die projektive Gerade der Matrizen vom Rang 1 ersetzt wird durch den Raum $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ der (Doppel-)Geraden bildenden Kegelschnitte.

4.2 Die Polarität

Definition 4.10 Sei $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ ein regulärer Kegelschnitt, d.h. $\mathcal{C} \in \text{GL}(3, \mathbb{K})$ symmetrisch und $\mathcal{C}^\Delta \sim \mathcal{C}^{-1}$. Dann ist jedem Punkt Q der projektiven Ebene seine Polare p_Q und jeder Geraden g ihr Pol P_g zugeordnet:

$$p_Q \sim \mathcal{C}Q, \quad P_g \sim \mathcal{C}^\Delta g. \quad (4.9)$$

Diese Bijektion zwischen Punkten und Geraden nennen wir (die durch den Kegelschnitt vermittelte) Polarität.

Theorem 4.11 Die durch einen regulären Kegelschnitt vermittelte Polarität ist eine Involution, die Inzidenz und Doppelverhältnisse erhält. Sie bildet kollineare Punkte auf konkurrente Geraden sowie konkurrente Geraden auf kollineare Punkte ab.

Beweis. Per Konstruktion ist der Pol einer Polaren der Ursprungspunkt und die Polare eines Pols die Ursprungsgerade: $\mathcal{C}\mathcal{C}^\Delta \sim \mathcal{I} \sim \mathcal{C}^\Delta\mathcal{C}$. Also ist die Polarität selbstinvers. Sind ein Punkt Q und eine Gerade g inzident, so gilt

$$0 = g^T Q \sim g^T \mathcal{C}^\Delta \mathcal{C} Q = g^T \mathcal{C}^\Delta \mathcal{I} \mathcal{C} Q \sim P_g^T p_Q = p_Q^T P_g,$$

d.h. p_Q und P_g sind ebenfalls inzident. Kollinearität und Konkurrenz sind spezielle Inzidenzen. Die Invarianz des Doppelverhältnisses folgt aus dessen Invarianz unter projektiven Abbildungen. \boxtimes

Die Dualität von Punkten und Geraden, auf die wir schon in Kapitel 2 verwiesen haben, erscheint nun als (elliptische) Polarität zum Kegelschnitt $(\mathcal{I}, \mathcal{I})$ (ohne reelle Punkte).

Proposition 4.12 *Sei $p \sim \mathcal{C}P$ die Polare eines Pols P bezüglich eines regulären Kegelschnitts. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

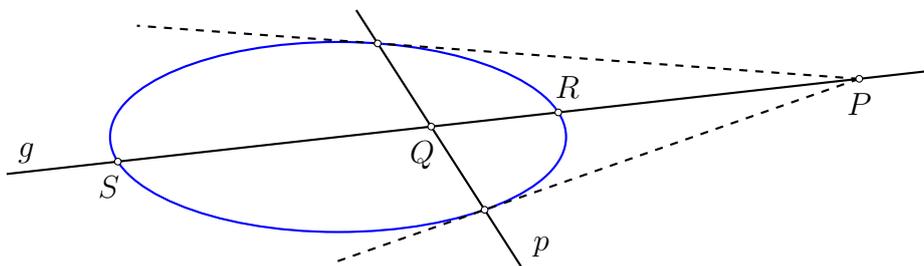
- (i) P und p sind inzident.
- (ii) P liegt auf dem Kegelschnitt.
- (iii) p liegt tangential an den Kegelschnitt.

Beweis. Dies ist eine direkte Folgerung von Proposition 4.2. ⊠

Ist $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ ein singulärer Kegelschnitt, so hat die von ihm vermittelte Abbildung einen Kern und wird deshalb i.d.R. nicht mehr als Polarität bezeichnet. Wir können aber trotzdem noch von Polen und Polaren sprechen. Hat z.B. $\mathcal{C} = gg^T$ den Rang 1 (Doppelgerade) und $\mathcal{C}^\Delta = PQ^T + QP^T$ den Rang 2, so ist g die Polare jeden Punktes (ggf. einschließlich der Punkte auf g , die zunächst im Kern von \mathcal{C} liegen). Die Pole aller Geraden — bis auf g selbst — sind eindeutig bestimmt und liegen auf g . Die Tangenten sind wieder die Geraden, die durch ihren Pol gehen, d.h. die Geraden, die durch P oder Q gehen. Wir nennen g dann auch absolute Polare und P, Q absolute Pole (und in Kapitel 7 absolute Brennpunkte).

Korollar 4.13 *Sei $p \sim \mathcal{C}P$ die Polare eines Pols $P \notin p$ bezüglich eines regulären Kegelschnitts. Dann schneidet die Polare p den Kegelschnitt in den Berührungspunkten der Tangenten durch den Pol P .*

Beweis. Dies folgt direkt aus Proposition 4.12 und der Inzidenzerhaltung. ⊠



Beachte, dass die Schnittpunkte und die Tangenten komplex sein können. Für reelle Kegelschnitte ist die Polare eines reellen Punktes aber stets reell. Existieren zwei reelle Tangenten an den (reellen) Kegelschnitt, so nennen wir den Pol einen *äußeren* Punkt des Kegelschnitts, andernfalls einen *inneren*. (Per Dualität ist eine Gerade, die den Kegelschnitt reell schneidet, eine äußere.)

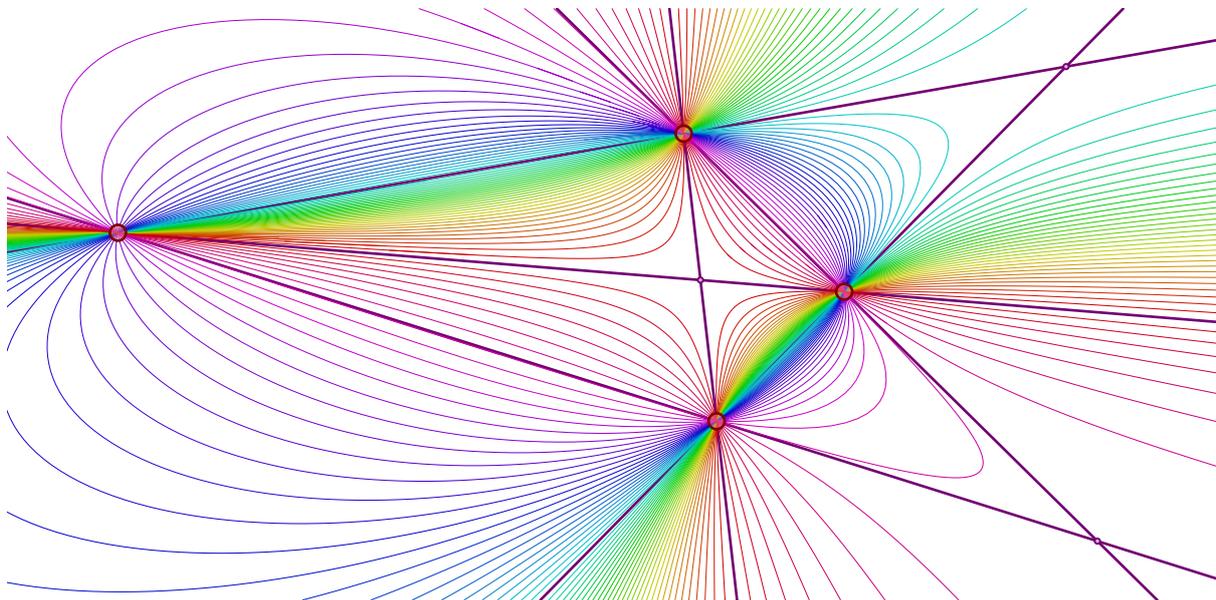
Theorem 4.14 Sei P, p ein Pol-Polare-Paar, $P \notin p$, zu einem regulären Kegelschnitt \mathcal{C} . Sei ferner g eine Gerade durch P , die \mathcal{C} in $R \neq S$ schneidet. Setze $Q = p \cap g$. Dann stehen $(P, Q; R, S)$ in harmonischem Verhältnis.

Beweis. Die Polarität vermittelt eine projektive Abbildung $V \mapsto g \cap \text{Polar}(V) \sim g \times \mathcal{C}V \sim \mathcal{X}_g \mathcal{C}V$, wobei \mathcal{X}_g wieder das Vektorprodukt mit g realisiert. Dies ist sogar eine Involution mit den Fixpunkten R, S . Vergleiche Abschnitt 3.1. \boxtimes

Übung 4.15 Vollständige Vierecke ermöglichen es, bezüglich eines gegebenen Punktepaars einen weiteren kollinearen Punkt (allein mit dem Lineal) harmonisch zu ergänzen. Betrachte erneut Theorem 4.14 und gib eine Konstruktion der Polaren eines (zunächst äußeren) Punktes allein mit dem Lineal an.

Übung 4.16 Nutze die Eigenschaften der Polarität um mittels der Konstruktion der vorigen Übung den Pol einer gegebenen Geraden zu konstruieren. Konstruiere danach auch die Polare zu einem inneren Punkt eines Kegelschnitts.

4.3 Bündel von Kegelschnitten



Definition 4.17 Das durch zwei Kegelschnitte $\mathcal{C} \not\sim \mathcal{D}$ erzeugte Bündel ist gegeben durch

$$\{ \gamma \mathcal{C} + \delta \mathcal{D} \mid (\gamma, \delta) \in \mathbb{K}P^1 \}. \quad (4.10)$$

Wir nennen ein Bündel von Kegelschnitten regulär, wenn es wenigstens einen regulären Kegelschnitt enthält.

Die (höchstens drei) singulären Elemente eines regulären Büschels von Kegelschnitten sind gegeben durch die Nullstellen der kubischen Gleichung

$$0 = \det(\gamma\mathcal{C} + \delta\mathcal{D}). \quad (4.11)$$

Ein Büschel von Kegelschnitten bildet eine projektive Gerade und kann durch beliebige (verschiedene) seiner Elemente erzeugt werden. Per Konstruktion ist der Schnitt $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ unabhängig von der Wahl der Vertreter.

In allgemeiner Lage ist das Kegelschnitt-Büschel gegeben durch die vier Punkte

$$\{P_1, P_2, P_3, P_4\} = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$$

in allgemeiner Lage. Tatsächlich sind einfache Lösungen von (4.11) Matrizen vom Rang 2. Diese stellen singuläre Kegelschnitte dar, die durch Paare gegenüberliegender Seiten des vollständigen Vierecks gegeben sind.

Übung 4.18 *Die singulären Vertreter eines Kegelschnittbüschels sind durch eine kubische Gleichung gegeben und zerfallen in Geraden, vergleiche mit Übung 4.4. Formuliere daraus einen Algorithmus, der die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte bestimmt.*

Sind umgekehrt vier Punkte $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ in allgemeiner Lage gegeben (d.h. keine drei kollinear), so ist jeder Kegelschnitt durch diese vier Punkte eine Linearkombination $\gamma\mathcal{C} + \delta\mathcal{D}$ der singulären Kegelschnitte, z.B.

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= (P_1 \times P_3)(P_2 \times P_4)^T + (P_2 \times P_4)(P_1 \times P_3)^T, \\ \mathcal{D} &= (P_1 \times P_2)(P_3 \times P_4)^T + (P_3 \times P_4)(P_1 \times P_2)^T. \end{aligned}$$

Durch einen fünften Punkt $P_5 \notin \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ verläuft genau ein Kegelschnitt des Büschels, nämlich $\mathcal{D}[P_5]\mathcal{C} - \mathcal{C}[P_5]\mathcal{D}$. Jeder weitere Punkt P_6 dieses Kegelschnitts erfüllt die Gleichung

$$0 = [P_1P_2P_5][P_3P_4P_5][P_1P_3P_6][P_2P_4P_6] - [P_1P_2P_6][P_3P_4P_6][P_1P_3P_5][P_2P_4P_5]. \quad (4.12)$$

Übung 4.19 *Diskutiere das mögliche Auftreten von Matrizen mit Rang 1 in einem Büschel. Finde geeignete duale Matrizen als stetige Fortsetzung der dualen Matrizen des Büschels und beschreibe so die Gestalt der singulären Kegelschnitte.*

Sei $g \sim P \times Q$ eine Gerade und $\{\gamma\mathcal{C} + \delta\mathcal{D}\}$ ein regulärer Kegelschnitt. Aufgrund von (4.3) aus dem Beweis von Proposition 4.1 ist g tangential an $\gamma\mathcal{C} + \delta\mathcal{D}$ genau dann, wenn

$$0 = \det \begin{bmatrix} \gamma\mathcal{C}[P] + \delta\mathcal{D}[P] & \gamma P^T\mathcal{C}Q + \delta P^T\mathcal{D}Q \\ \gamma Q^T\mathcal{C}P + \delta Q^T\mathcal{D}P & \gamma\mathcal{C}[Q] + \delta\mathcal{D}[Q] \end{bmatrix}.$$

Dies ist wiederum eine quadratische Gleichung in (γ, δ) . Wir finden also zwei an g tangentiale Elemente des Büschels, die zusammenfallen können. Für reelle Geraden und Büschel können die tangentialen Elemente konjugiert komplex sein.

Theorem 4.20 *Die Schnittpunktpaare eines regulären Büschels von Kegelschnitten mit einer Geraden in allgemeiner Lage definieren eine projektive Involution. Die Berührungspunkte der beiden tangentialen Kegelschnitte sind die Fixpunkte dieser Involution.*

Beweis. Allgemeine Lage heißt hier, dass die Gerade nicht durch die Schnittpunkte des Büschels verläuft und tangential an zwei verschiedene Kegelschnitte ist. (Jeder Punkt der Geraden liegt auf genau einem Kegelschnitt des Büschels.) Seien $\mathcal{C} \not\sim \mathcal{D}$ die tangentialen Kegelschnitte des Büschels. Ihre Berührungspunkte mit der Geraden seien $P \not\sim Q$. Also ist $\mathcal{C}[P] = \mathcal{D}[Q] = P^T \mathcal{C} Q = Q^T \mathcal{D} P$. Das Schnittpunktpaar $\lambda P + \mu Q$ eines Elements $\gamma \mathcal{C} + \delta \mathcal{D}$ des Büschels mit der Geraden ist dann gegeben durch

$$0 = \delta \mathcal{D}[P] \lambda^2 + \gamma \mathcal{C}[Q] \mu^2$$

siehe (4.3). Die tangentialen Punkte P, Q für $\delta = 0$ bzw. $\gamma = 0$ sind schon bekannt. Alle anderen Schnittpunkte bilde Paare der Form $\mu = \pm \sqrt{-\delta \mathcal{D}[P] / (\gamma \mathcal{C}[Q])} \lambda$.

Die Involution hat also (in byzentrischen Koordinaten bzgl. P, Q) die Form $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda \\ -\mu \end{pmatrix}$ und wird durch die lineare Abbildung $\text{diag}(1, -1)$ induziert. Sie ist daher, wie behauptet, eine projektive Abbildung. (Insbesondere liegen $\begin{pmatrix} \lambda \\ \pm \mu \end{pmatrix}$ stets harmonisch zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, was auch direkt nachgerechnet werden kann.) \boxtimes

Übung 4.21 *Betrachte erneut eine Vierecksmenge $(P, \tilde{P}; Q, \tilde{Q}; R, \tilde{R})$ auf einer Geraden, siehe Übung 3.8. Seien $\{P, \tilde{P}\}, \{Q, \tilde{Q}\}, \{R, \tilde{R}\}$ paarweise disjunkt. (Die Punkte innerhalb der Paare können übereinstimmen.) Zeige, dass es genau eine projektive Involution der Gerade gibt, die die Punkte der Vierecksmenge paarweise vertauscht. (Hinweis: Beachte Übung 3.2.)*

4.4 Der Kegelschnitt als projektive Gerade

Die Gleichung (4.12) eines regulären Kegelschnitts \mathcal{C} kann als Gleichheit von Doppelverhältnissen ausgedrückt werden:

$$\frac{[O_1 P_1 P_3][O_1 P_2 P_4]}{[O_1 P_1 P_4][O_1 P_2 P_3]} = \frac{[O_2 P_1 P_3][O_2 P_2 P_4]}{[O_2 P_1 P_4][O_2 P_2 P_3]} =: (P_1, P_2; P_3, P_4)_C. \quad (4.13)$$

Das Doppelverhältnis zweier Punktpaare ist unabhängig von der Wahl des Zentrums *auf einem gemeinsamen Kegelschnitt*. Wie im Beweis des Fundamentalsatzes können wir einen

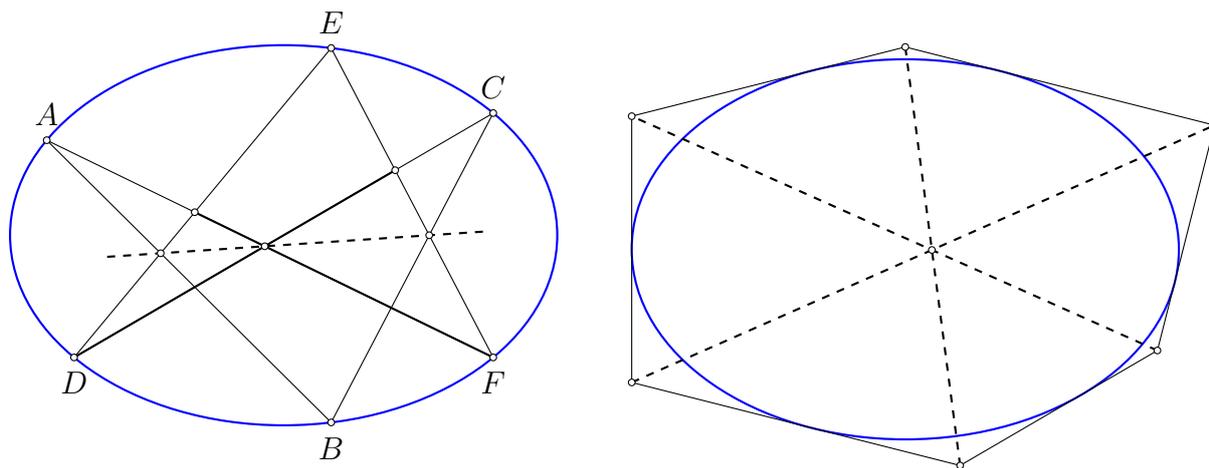
Kegelschnitt durch Wahl von drei Basispunkten $(0, 1, \infty)$ als projektive Gerade auffassen, siehe Abschnitt 3.4.

Sind ein regulärer Kegelschnitt \mathcal{C} und eine Gerade g_1 gegeben, so definiert jedes Perspektivitätszentrum $O_1 \in \mathcal{C} \setminus g_1$ eine Bijektion zwischen \mathcal{C} und g_1 . Dabei stimmen die Doppelverhältnisse auf dem Kegelschnitt mit denen auf der Geraden überein. Jedes weitere Zentrum $O_2 \in \mathcal{C} \setminus g_2$ bezüglich einer Geraden g_2 definiert dann eine *projektive Abbildung* $g_1 \rightarrow g_2$. Jede projektive Abbildung der Ebene, die den Kegelschnitt invariant lässt, lässt auch die Doppelverhältnisse auf dem Kegelschnitt invariant.

Übung 4.22 Betrachte sechs Punkte $(P, \tilde{P}; Q, \tilde{Q}; R, \tilde{R})$ auf einem regulären Kegelschnitt, so dass die Geraden $P \times \tilde{P}, Q \times \tilde{Q}, R \times \tilde{R}$ konkurrent sind. Zeige, dass $(P, \tilde{P}; Q, \tilde{Q}; R, \tilde{R})$ dann eine Vierecksmenge bilden, vergleiche Übung 3.8. Gilt die Umkehrung?

Übung 4.23 Sind zwei (disjunkte) Paare von Punkten $(P, \tilde{P}; Q, \tilde{Q})$ auf einer Gerade gegeben, so existiert genau eine projektive Involution der Gerade, die die Punkte paarweise vertauscht. Wie können die beiden Fixpunkte dieser Involution allein mit dem Lineal konstruiert werden, wenn nur irgendein regulärer Kegelschnitt vorgegeben ist? (Hinweis: Beachte Theorem 4.14. Sind die Fixpunkte bekannt, können beliebige andere Bilder durch vollständige Vierecke konstruiert werden, siehe Abschnitt 3.3.)

4.5 Die Sätze von Pascal & Brianchon



Theorem 4.24 (Pascal) Liegen die Ecken eines Sechsecks auf einem regulären Kegelschnitt, so schneiden sich die drei Paare gegenüberliegender Seiten in drei kollinearen Punkten. (www.stefan-liebscher.de/geometry)

Beweis. Wir beweisen den Satz für paarweise verschiedene Punkte.

Algebraische Variante: Genau wie im Satz 2.9 von Pappos drücken wir die behauptete Kollinearität der Schnitte $(A \times B) \times (D \times E)$, $(C \times D) \times (F \times A)$, $(E \times F) \times (B \times C)$ als Determinantenbeziehung aus:

$$\begin{aligned} 0 = & [ABE][CDA][EFC][DFB] - [ABE][CDA][EFB][DFC] \\ & - [ABE][CDF][EFC][DAB] + [ABE][CDF][EFB][DAC] \\ & - [ABD][CDA][EFC][EFB] + [ABD][CDA][EFB][EFC] \\ & + [ABD][CDF][EFC][EAB] - [ABD][CDF][EFB][EAC] \end{aligned}$$

Nach Streichung der drei Paare sich gegenseitig aufhebender Terme ist das gerade die Gleichung des vorausgesetzten Kegelschnittes:

$$0 = [ABE][CDA][EFC][DFB] - [ABD][CDF][EFB][EAC].$$

Geometrische Variante: Wir benutzen die Korrespondenz des Kegelschnitts zur projektiven Geraden. Wir betrachten die perspektiven Bilder von $DBEF$ aus A auf $D \times E$ und aus C auf $E \times F$. Dies zeigt die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(D, AB \times DE; E, AF \times DE) = (DC \times EF, BC \times EF; E, F).$$

Da E in beiden Doppelverhältnissen auftaucht, müssen die Geraden durch die drei anderen Paarungen konkurrent sein (Betrachte den Schnitt der Geraden durch zwei Paarungen als Perspektivitätszentrum.) Also sind auch

$$D \times C, \quad (AB \times DE) \times (BC \times EF), \quad A \times F,$$

konkurrent, wie behauptet. ✕

Der Satz 2.9 von Pappos wird zum Korollar des Satzes von Pascal, wenn der Kegelschnitt zu einem Paar von Geraden entartet.

Übung 4.25 Diskutiere des Satz von Pascal für singuläre Lagen der Punkte.

Theorem 4.26 (Brianchon) Die Diagonalen eines einem Kegelschnitt umbeschriebenen Sechseits sind konkurrent. (www.stefan-liebscher.de/geometry)

Beweis. Der Satz ist dual zum Satz von Pascal. ✕

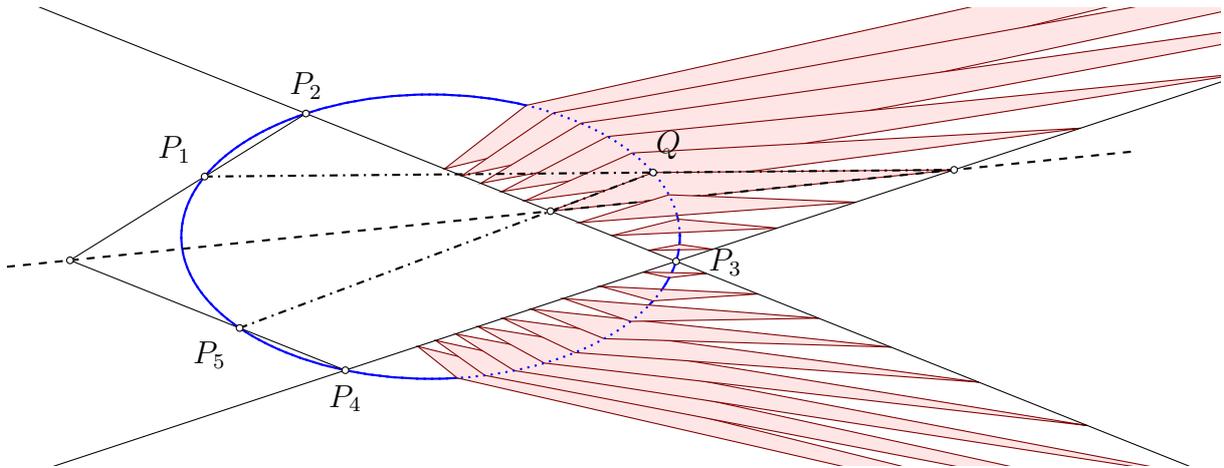
Die Anordnungen der Ecken im Satz von Pascal und der Seiten im Satz von Brianchon sind nicht festgelegt. Tatsächlich finden sich 40 Pascal-Geraden und 40 Brianchon-Punkte.

4.6 Kegelschnittkonstruktionen

Durch fünf Punkte P_1, \dots, P_5 in allgemeiner Lage wird ein **eindeutiger Kegelschnitt** definiert. Jeder sechste Punkt auf diesem Kegelschnitt erfüllt die Determinanten-Relation (4.19). Als Matrix hat der Kegelschnitt die Gestalt $\mathcal{C} + \mathcal{C}^T$ mit

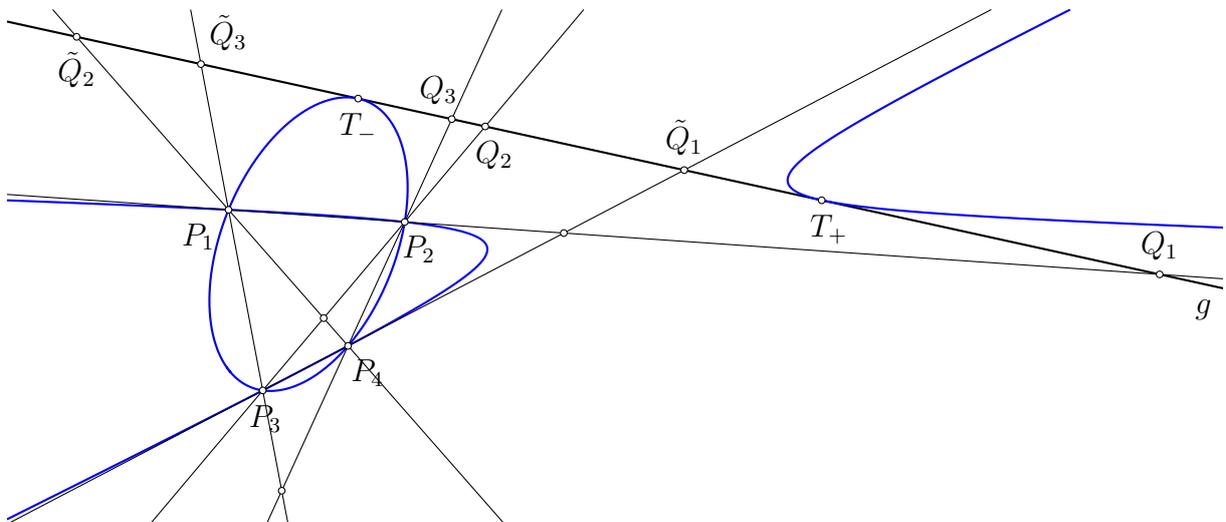
$$\mathcal{C} = [P_1 P_2 P_5][P_3 P_4 P_5](P_1 \times P_3)(P_2 \times P_4)^T - [P_1 P_3 P_5][P_2 P_4 P_5](P_1 \times P_2)(P_3 \times P_4)^T. \quad (4.14)$$

Der Satz von Pascal ermöglicht es, weitere Punkte auf dem Kegelschnitt allein mit dem Lineal zu konstruieren.



Übung 4.27 Diskutiere durch fünf Punkte in singulärer Lage definierte Kegelschnitte.

Sind eine Gerade g und vier Punkte P_1, \dots, P_4 in allgemeiner Lage gegeben, so definiert das Bündel von Kegelschnitten durch die vier Punkte eine Involution auf g , deren Fixpunkte die Berührungspunkte der **tangentialen Kegelschnitte** des Bündels sind, siehe Abschnitt 4.3.



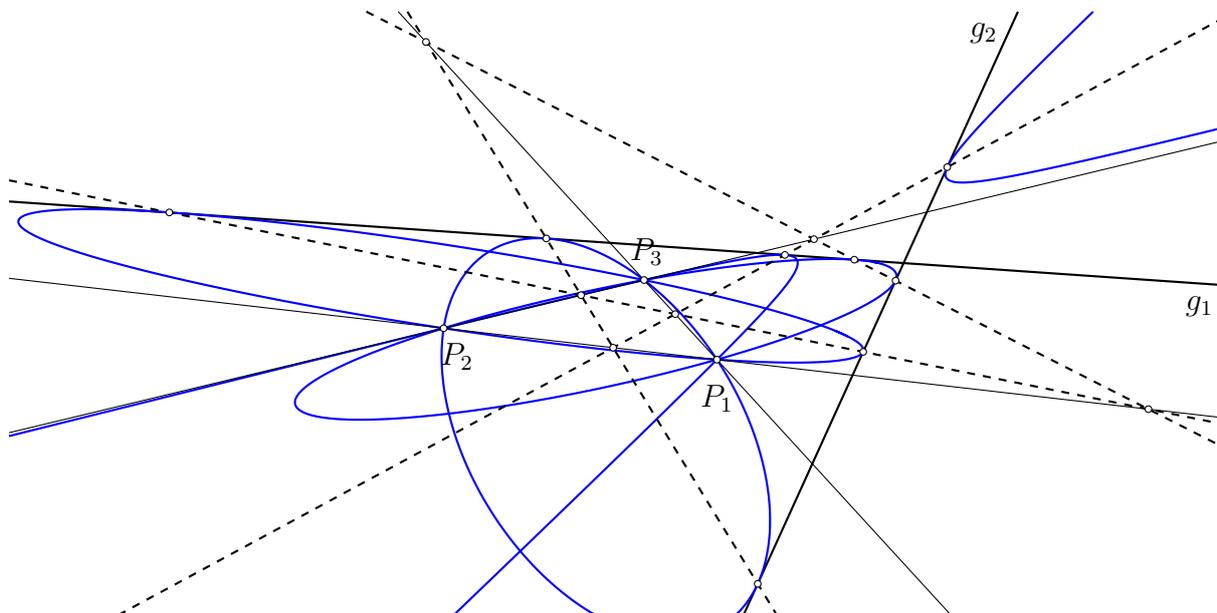
Die Schnittpunkte von g mit den Seiten des vollständigen Vierecks P_1, \dots, P_4 bilden 3 Paare Q_ℓ, \tilde{Q}_ℓ , die durch die Involution aufeinander abgebildet werden. Die Fixpunkte liegen harmonisch zu jedem der Paare, haben also die Form $\lambda_\ell Q_\ell \pm \mu_\ell \tilde{Q}_\ell$. Ist $Q_1 \not\sim \tilde{Q}_1$ können die Fixpunkte dargestellt werden als

$$T_\pm = \sqrt{[O\tilde{Q}_1Q_2][O\tilde{Q}_1\tilde{Q}_2]Q_1} \pm \sqrt{[OQ_1Q_2][OQ_1\tilde{Q}_2]\tilde{Q}_1}, \quad (4.15)$$

mit einem beliebigen Punkt $O \notin g$. Die Fixpunkte können auch allein mit dem Lineal konstruiert werden, sofern (irgend) ein Kegelschnitt gegeben ist, siehe Übung 4.23.

Übung 4.28 Diskutiere durch eine Gerade und vier Punkte in singulärer Lage definierte Kegelschnitte.

Sind zwei Geraden g_1, g_2 und drei Punkte P_1, P_2, P_3 in allgemeiner Lage gegeben, so definiert jeder Kegelschnitt durch P_1, P_2, P_3 ein Büschel mit dem singulären Kegelschnitt $g_1g_2^T$. Ist der erste Kegelschnitt tangential an beide Geraden, so hat das Büschel zwei doppelte Schnittpunkte. Die (Doppel-)Gerade durch diese beiden Tangentialpunkte ist der zweite singuläre Kegelschnitt des Büschels. Auf den Geraden $P_k \times P_\ell$ definieren alle diese Büschel dieselben projektiven Involutionen, die P_k auf P_ℓ sowie die Schnittpunkte mit g_1, g_2 aufeinander abbilden. Die vier Geraden durch ihre Fixpunkte schneiden g_1, g_2 also in den Berührungspunkten der **tangentialen Kegelschnitte** durch P_1, P_2, P_3 . Diese Fixpunkte können wie zuvor bestimmt werden.



Übung 4.29 Diskutiere durch zwei Geraden und drei Punkte in singulärer Lage definierte Kegelschnitte.

5 Die Cayley-Klein Geometrien

5.1 Spiegelungen als ausgezeichnete Involutionen

Für reguläre Kegelschnitte \mathcal{C} haben wir Pol-Polare-Paare in Abschnitt 4.2 definiert als Paare (P, p) mit $p \sim \mathcal{C}P$. Automatisch gilt dann auch $P \sim \mathcal{C}^{-1}p$. Für singuläre Kegelschnitte treten Kerne auf.

Definition 5.1 Ein Pol-Polare-Paar bezüglich eines Kegelschnitts $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ ist ein Paar (P, p) aus Punkt P und Gerade p mit

$$\left(\mathcal{C}P \sim p \text{ oder } \mathcal{C}P = 0 \right) \quad \underline{\text{und}} \quad \left(\mathcal{C}^\Delta p \sim P \text{ oder } \mathcal{C}^\Delta p = 0 \right).$$

Alternativ ist (P, p) ein Pol-Polare-Paar, wenn $\mathcal{C}^\Delta p = \lambda P$ und $\mathcal{C}P = \mu p$ für geeignete Skalare λ, μ , wobei die Koeffizienten auch Null sein dürfen.

Theorem 5.2 Ist (P, p) ein Pol-Polare-Paar zum Kegelschnitt $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ mit $P \notin p$, so bildet die projektive Involution mit Spiegelungszentrum P und Spiegelungsgerade p den Kegelschnitt auf sich ab.

Beweis. (Für reguläre \mathcal{C} folgt die Behauptung auch aus Theorem 4.14.) Seien also P, p gegeben mit $\mathcal{C}^\Delta p = \lambda P$ und $\mathcal{C}P = \mu p$. Die Involution hat dann die Gestalt

$$\mathcal{R} = \text{Invol}(P, p) = (p^\top P)\mathcal{I} - 2Pp^\top,$$

siehe (3.3), und bildet den Kegelschnitt ab als

$$(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta) \longmapsto (\mathcal{R}^{-\top} \mathcal{C} \mathcal{R}^{-1}, \mathcal{R} \mathcal{C}^\Delta \mathcal{R}^\top) = ((p^\top P)^{-2} \mathcal{C}, (p^\top P)^2 \mathcal{C}^\Delta) \sim (\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta). \quad (5.1)$$

siehe (4.8). Also werden tatsächlich Punkte und Tangenten des Kegelschnitts auf ebensolche abgebildet. \boxtimes

Umgekehrt bilden (mit einer Ausnahme) Zentrum M und Spiegel m jeder projektiven Involution \mathcal{R} , die einen Kegelschnitt $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ auf sich abbildet, ein Pol-Polare-Paar. Für reguläre Kegelschnitte ist dies eine direkte Folgerung von Theorem 4.14. Die gleiche Argumentation trifft auf singuläre Kegelschnitte zu, sofern $\mathcal{C}[M] \neq 0$ oder $\mathcal{C}^\Delta[m] \neq 0$. Der Fall $\mathcal{C}[M] = 0 = \mathcal{C}^\Delta[m]$ offenbart einen Ausnahmefall: Hat \mathcal{C} den Rang 2 und zerfällt somit zwei verschiedene Geraden f, g , so ist $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ invariant unter der Involution mit Spiegel $m \sim f$ und Zentrum $M \in g \setminus f$. Ein analoger Ausnahmefall existiert für \mathcal{C}^Δ vom Rang 2. Diese Ausnahmesituationen stellen Involutionen dar, die keine Fortsetzung haben, wenn der singuläre Kegelschnitt (durch eine Störung) regularisiert wird.

Definition 5.3 Ein Kegelschnitt $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ erzeugt zwei Gruppen projektiver Abbildungen:

- $\text{Cong}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta) = \langle \{ \text{Invol}(P, p) \mid \mathcal{C}P = \lambda p, \mathcal{C}^\Delta p = \mu P \} \rangle$, die Kongruenzen des Kegelschnitts, die durch von Pol-Polare-Paaren gegebenen Involutionen erzeugt werden.
- $\text{Sim}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta) = \text{PGL}(3, \mathbb{K})_{(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)}$, die Isotropien des Kegelschnitts. Dies sind alle projektiven Abbildungen, die den Kegelschnitt auf sich abbilden.

Für reguläre Kegelschnitte stimmen beide Gruppen überein. Singuläre Kegelschnitte erlauben Reskalierungen, die nicht durch Involutionen erzeugt werden können. Die Kongruenzen bilden dann eine echte Untergruppe der Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen.

Betrachten wir einen regulären Kegelschnitt. Im Reellen existieren zwei Typen regulärer Kegelschnitte. Wir finden

$$\text{Sim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}, \mathcal{I}) \cong \text{PO}(3) \cong \text{O}(3)/\{\mathcal{I}, -\mathcal{I}\} \cong \text{SO}(3)$$

für Kegelschnitte ohne reelle Punkte. Hat der Kegelschnitt reelle Punkte, so hat er die Normalform $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\Delta = \text{diag}(1, 1, -1)$ und stellt eine (reelle) projektive Gerade dar. Projektive Abbildungen, die den Kegelschnitt auf sich abbilden, sind durch 4 Punkte des Kegelschnitts und ihre Bilder mit gleichem Doppelverhältnis gegeben. Sie korrespondieren also gerade zu den harmonischen Abbildungen des Kegelschnitts:

$$\text{Sim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta) \cong \text{PGL}(2, \mathbb{R}).$$

Im Komplexen sind beide Fälle äquivalent:

$$\text{Sim}_{\mathbb{C}}(\mathcal{I}, \mathcal{I}) \cong \text{PGL}(2, \mathbb{C}).$$

Übung 5.4 Liegen die vier (paarweise verschiedene) Punkte und ihre Bilder auf einem gemeinsamen (regulären) Kegelschnitt, so lässt die durch sie festgelegte projektive Abbildung den Kegelschnitt genau dann invariant, wenn Urbilder und Bilder dasselbe Doppelverhältnis (bezüglich des Kegelschnitts) haben. (Vergleiche Theorem 2.3 und (4.13).)

5.2 Die euklidische Ebene

Betten wir die euklidische Ebene durch die Normierung $\{z = 1\}$ in die projektiven Ebene ein, so stellt die projektive Gerade $\{z = 0\}$ den Horizont der unendlich fernen Punkte der euklidischen Ebene dar. Angesichts des vorigen Abschnitts wollen wir diesen Horizont als einen zur Doppelgeraden entarteten Kegelschnitt

$$\Omega = \text{diag}(0, 0, 1)$$

ausfassen, so dass die euklidischen Kongruenzabbildungen der Gruppe $\text{Cong}_{\mathbb{R}}(\Omega, \Omega^{\Delta})$ und die Ähnlichkeitsabbildungen der Gruppe $\text{Sim}_{\mathbb{R}}(\Omega, \Omega^{\Delta})$ entsprechen.

Wir wissen, dass die euklidischen Kongruenzabbildungen durch die Geradenspiegelungen erzeugt werden. Aber betrachten wir zunächst Punktspiegelungen

$$\mathcal{R}_M : \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2M^1 - X^1 \\ 2M^2 - X^2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} M^1 \\ M^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

am Punkt $M = (M^1, M^2, 1)^T$. Sie haben die Matrix-Form $\mathcal{I} - 2Mm^T = \text{Invol}(M, m)$ einer projektiven Involutionen mit Zentrum M und Spiegel $m = (0, 0, 1)^T = \Omega M$ auf dem Horizont. Also wirklich $\mathcal{R}_M \in \text{Cong}_{\mathbb{R}}(\Omega)$.

Euklidische Geradenspiegelungen bilden die Lote $(-m_2, m_1, c)^T$ der Spiegelungsgeraden $m = (m_1, m_2, m_3)^T$ auf sich ab. Das Spiegelungszentrum (das wir für eine projektive Involution benötigen) kann also nur der Schnittpunkt $M = (m_1, m_2, 0)^T$ dieses Normalenbüschels sein. Tatsächlich ist die Involution

$$\text{Invol}(M, m) = (m^T M)\mathcal{I} - 2Mm^T = \begin{pmatrix} m_2^2 - m_1^2 & -2m_1m_2 & -2m_1m_3 \\ -2m_1m_2 & m_1^2 - m_2^2 & -2m_2m_3 \\ 0 & 0 & m_1^2 + m_2^2 \end{pmatrix}$$

gerade die euklidische Geradenspiegelung an m , beachte $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$. Die Paare (M, m) sind genau dann für alle Geraden m Pol-Polare-Paare, wenn

$$\Omega^{\Delta} = \text{diag}(1, 1, 0)$$

gewählt wird. Mit dieser Wahl generieren Pol-Polare-Paare genau die euklidischen Punkt- und Geradenspiegelungen und erzeugen die euklidischen Kongruenzabbildungen,

$$\text{Cong}_{\mathbb{R}}(\text{diag}(0, 0, 1), \text{diag}(1, 1, 0)) = \text{E}(2).$$

Die Isotropien

$$\mathcal{L} : \quad \Omega \sim \mathcal{L}^{-T}\Omega\mathcal{L}^{-1}, \quad \Omega^{\Delta} \sim \mathcal{L}\Omega^{\Delta}\mathcal{L}^T,$$

haben dann die Gestalt

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & B \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} \in O(2), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dabei parametrisiert \mathcal{A} , für $\det \mathcal{A} = 1$, die Drehungen um den Ursprung, $\mathcal{A} = -\mathcal{I}$ eine Spiegelung, B die Translationen und λ die zentrischen Streckungen. Die Isotropien des Kegelschnitts sind also tatsächlich die euklidischen Ähnlichkeitsabbildungen,

$$\text{Sim}_{\mathbb{R}}(\text{diag}(0, 0, 1), \text{diag}(1, 1, 0)) = \text{Sim}(E^2).$$

Übung 5.5 Der duale Kegelschnitt $\Omega^\Delta = \text{diag}(1, 1, 0)$ zerfällt in die absoluten Pole $I = (-\mathbf{i}, 1, 0)$, $J = (+\mathbf{i}, 1, 0)$. Zeige (analytisch), dass **jeder** euklidische Kreis in $\{z = 1\}$ den Horizont $\{z = 0\}$ in diesen beiden Punkten schneidet. (Die beiden Punkte werden deshalb auch absolute Kreispunkte genannt. Geraden durch die absoluten Pole sind Tangenten des Kegelschnitts, also **berühren** die Kreise den absoluten Kegelschnitt in beiden Punkten. Diese Sichtweise werden wir in Abschnitt 6 wieder aufgreifen.)

Übung 5.6 (Laguerre-Formel) Betrachte wieder die absolute Pole $I = (-\mathbf{i}, 1, 0)$, $J = (+\mathbf{i}, 1, 0)$ der euklidische Ebene $\{z = 1\}$. Sowie zwei euklidische Geraden g, h , die den Horizont in G, H schneiden. Zeige, dass der von g, h eingeschlossene Winkel φ der Formel

$$\exp(2\mathbf{i}\varphi) = (G, H; I, J) = \frac{g^\top I h^\top J}{g^\top J h^\top I}$$

genügt, also aus dem Doppelverhältnis berechnet werden kann. (Vergleiche auch (2.22).)

5.3 Die Klassifikation durch den absoluten Kegelschnitt

Allgemein definieren wir eine Geometrie, indem wir einen absoluten Kegelschnitt (Ω, Ω^Δ) auszeichnen, der die Punkte im Unendlichen repräsentiert (und daher unter Isometrien und ggf. Ähnlichkeitsabbildungen invariant bleiben soll). Entsprechend der Klassifikation der Kegelschnitte in Abschnitt 4.1 erhalten wir dadurch eine Liste der in die (reelle) projektive Ebene eingebetteten Geometrien.

Elliptisch: $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ sphärische Geometrie	Euklidisch: $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	Hyperbolisch: $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ Lobačevskij, Beltrami/Klein
Dual-euklidisch: $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	Galilei: $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ klassische Mechanik	Dual-Minkowski: $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$
Hyperbolisch: $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ Dual-Lobačevskij, Anti-deSitter-Raum	Minkowski: $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ pseudo-euklidisch, spezielle Relativitätstheorie	Hyperbolisch: $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ Kosmologie, DeSitter-Raum

Die drei hyperbolischen Fälle können zusammengefasst werden. Die reelle projektive Ebene zerfällt im hyperbolischen Fall allerdings in drei (unter den Isotropien des absoluten Kegelschnitts invariante) Teile:

- Beltrami/Klein: innere Punkte (ohne reelle Tangenten an Ω) + [äußere] Linien
- Anti-deSitter: äußere Punkte + innere Linien (ohne reelle Schnitte mit Ω)
- DeSitter: äußere Punkte + äußere [zeitartige] Linien (die Ω reell schneiden)

Im elliptischen Fall gibt es nur innere Punkten und innere Geraden. Mit dieser Zerlegung der hyperbolischen Ebene können die Geometrien auch über die Lage ihrer Punkte und Geraden bezüglich des absoluten Kegelschnitts charakterisiert werden:

Tangenten reeller Punkte an (Ω, Ω^Δ) sind	Schnitte reeller Geraden mit (Ω, Ω^Δ) sind		
	konj. komplex	identisch	reell
konjugiert komplex	Elliptisch	Euklidisch	Beltrami/Klein
identisch	Dual-euklidisch	Galilei	Dual-Minkowski
reell	Anti-deSitter	Minkowski	DeSitter

5.4 Die Metrik aus dem Doppelverhältnis

Wie können wir einer durch den absoluten Kegelschnitt (Ω, Ω^Δ) definierten Geometrie eine Metrik zuweisen? Wir suchen ein Abstandsmaß $\text{dist}_{(\Omega, \Omega^\Delta)}$, das einem Punktepaar ein Skalar zuweist, und ein Winkelmaß $\text{ang}_{(\Omega, \Omega^\Delta)}$, das einem Geradenpaar ein Skalar zuweist. Beide Abstandsmaße sollen unter den Kongruenzabbildungen $\text{Cong}(\Omega, \Omega^\Delta)$ invariant sein. Außerdem erwarten wir eine Additivität für Abstände kollinearere Punkte und Winkel konkurrierender Geraden.

Proposition 5.7 Sind P, Q, R, X, Y kollinear, so gilt

$$(P, Q; X, Y)(Q, R; X, Y) = (P, R; X, Y).$$

Beweis. Einsetzen in die Definition (2.20). ✕

Bezüglich zweier fester Punkte X, Y hat der Logarithmus des Doppelverhältnisses von Punkten auf der Geraden $X \times Y$ also die gewünschte Additivität. Außerdem ist das Doppelverhältnis invariant unter allen projektiven Abbildungen. Wir kennen die zwei Punkte, die unter Kongruenzabbildungen der Geraden auf sich abgebildet werden müssen: die Schnittpunkte der Geraden mit dem absoluten Kegelschnitt.

Definition 5.8 Sind der absolute Kegelschnitt (Ω, Ω^Δ) und zwei Konstanten $\omega_{\text{dist}}, \omega_{\text{ang}}$ gegeben, so ist der Abstand zweier Punkte P, Q definiert als

$$\text{dist}(P, Q) = \text{dist}_\Omega(P, Q) = \omega_{\text{dist}} \ln(P, Q; X, Y), \quad \{X, Y\} = g \cap \Omega, \quad P, Q \in g;$$

d.h. als Logarithmus ihres Doppelverhältnisses zu den Schnittpunkten der Geraden durch P und Q mit dem absoluten Kegelschnitt. Dual dazu ist der Winkel zweier Geraden durch

$$\text{ang}(g, h) = \text{ang}_{\Omega^\Delta}(g, h) = \omega_{\text{ang}} \ln(g, h; x, y)$$

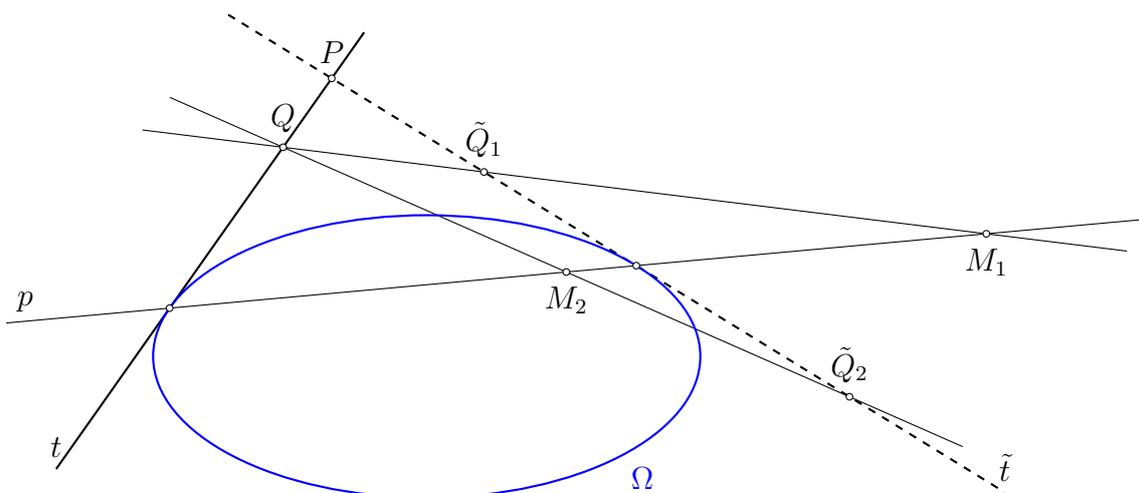
gegeben, wobei x, y zu g, h konkurrente Tangenten an den Kegelschnitt bezeichnen.

Dies benötigt einige Bemerkungen

- (i) Der Logarithmus ist nur bis auf Vielfache von $2\pi\mathbf{i}$ bestimmt.
- (ii) Die Vertauschung von P, Q oder X, Y invertiert das Doppelverhältnis. Wenn X, Y also nicht konsistent gewählt werden können, ist das Vorzeichen des Abstands unbestimmt. (Die Varianten mit Vorzeichen finden aber Verwendung für Abstände entlang einer Geraden oder für Winkel in einem Bündel konkurrenter Geraden.)
- (iii) Ist $P = Q \notin \Omega$, so $\text{dist}(P, Q) = 0$ unabhängig von g .
- (iv) Ist $X = Y \notin \{P, Q\}$, so $\text{dist}(P, Q) = 0$. Ist der absolute Kegelschnitt regulär (oder Ω zumindest vom Rang 2), so sind dies gerade die Abstände entlang Tangenten an den Kegelschnitt, siehe die anschließende Proposition 5.9.
- (v) Ist $X \neq Y, P \neq Q, \{X, Y\} \cap \{P, Q\} \neq \emptyset$, so $\text{dist}(P, Q) = \pm\infty$.
- (vi) Ist $X = Y \in \{P, Q\}$ oder $P = Q \in \Omega$, so ist $\text{dist}(P, Q)$ unbestimmt.

Auf der reellen projektiven Ebene ist das Doppelverhältnis reell (X, Y reell) oder komplex mit Norm 1 (X, Y konjugiert komplex). Ein reelles Doppelverhältnis ist genau dann negativ, wenn ein innerer mit einem äußeren Punkt verglichen wird. Dieser Fall wird ausgeschlossen. (Zwischen den Punkten liegt dann ein Punkt des absoluten Kegelschnitts, dessen Abstand zu beiden Punkten unendlich ist.) Der Abstand zweier innerer oder zweier äußerer Punkte ist reell oder rein imaginär. Im zweiten Fall ist er nur bis auf Vielfache von $2\pi\mathbf{i}\omega_{\text{dist}}$ bestimmt. (Das kennen wir von der Winkelmessung in der euklidischen Ebene.) Der Betrag und das Quadrat des Abstandes werden zu reellen Größen.

Proposition 5.9 Entlang einer Tangente an den absoluten Kegelschnitt ist jedes (unter $\text{Cong}(\Omega, \Omega^\Delta)$ invariante) Abstandsmaß konstant Null.



Beweis. Wir führen den Beweis nur für reguläre Kegelschnitte. Kongruenzabbildungen bilden Tangenten auf Tangenten ab. Seien also $\Omega \not\ni P \neq Q$ auf einer Tangente t von Ω gegeben. Sei $p = \Omega P$ die Polare zu P und $\tilde{t} \ni P$ die zweite Tangente an Ω durch P . Wähle $\tilde{Q} \in \tilde{t} \setminus (p \cup \{P\})$ beliebig. Die Spiegelung mit Zentrum $M = (Q \times \tilde{Q}) \cap p$ und Spiegel $m = \Omega M = (\Omega Q \cap \Omega \tilde{Q}) \times P$ vertauscht Q, \tilde{Q} und lässt P fest. Also ist $\text{dist}_\Omega(P, Q) = \text{dist}_\Omega(P, \tilde{Q})$ mit $\tilde{Q} \in \tilde{t}$ beliebig. (Durch eine fest gewählte Spiegelung könnte \tilde{Q} auch auf t zurückgespiegelt werden und durchläuft dann die Ausgangsgerade.) \boxtimes

Übung 5.10 Beweise Proposition 5.9 für Tangenten an singuläre Kegelschnitte (Ω, Ω^Δ) .

Proposition 5.11 Der Winkel zwischen (verschiedenen, nicht tangentialen) Geraden, die sich auf dem absoluten Kegelschnitt schneiden, ist stets Null.

Beweis. Per Dualität ist dies ein Korollar zu Proposition 5.9. Beachte, dass Abstände entlang Tangenten vom Berührungspunkt genauso wie Winkel zu Tangenten im Berührungspunkt unbestimmt sind. \boxtimes

In der euklidischen Ebene sind das gerade die parallelen Geraden. Vergleiche Übung 5.6.

Übung 5.12 Beweise die Aussage von Proposition 5.11 direkt, indem Du geeignete Spiegelungen angibst und graphisch darstellst.

Das Abstandsmaß dist_Ω degeneriert also notwendig für absolute Kegelschnitte mit Ω vom Rang eins (z.B. die euklidische Ebene), da die Tangenten dann nicht durch Ω bestimmt sind. Genau wie der Kegelschnitt selbst kann der Abstand aber durch Einbeziehung der dualen Matrix Ω^Δ desingularisiert werden. Zunächst betrachten wir jedoch die regulären Fälle des Abstandes dist_Ω entlang einer projektiven Geraden.

5.4.1 Hyperbolische Längenmessung

Identifizieren wir $\mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto P$, und wählen o.B.d.A. $X = -1$, $Y = 1$, so hat der Abstand (mit Vorzeichen) die Gestalt

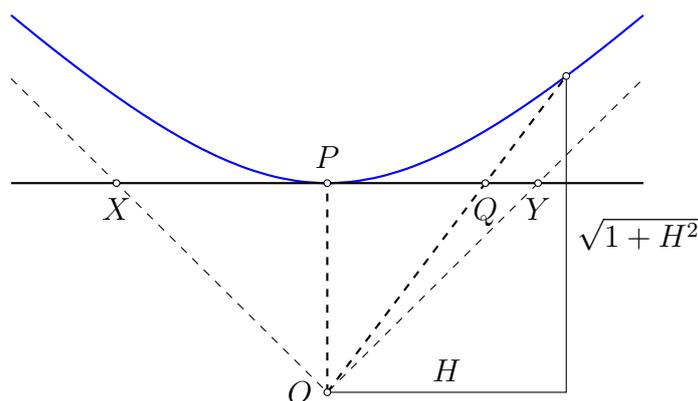
$$\text{dist}_{\text{hyp}}(P, Q) = \omega_{\text{dist}} \ln \frac{(P+1)(Q-1)}{(P-1)(Q+1)}. \quad (5.2)$$

Sofern P, Q nicht durch X, Y separiert werden, ist der Logarithmus reell. Halten wir einen Punkt $P = 0$ fest (und wählen $\omega_{\text{dist}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), so wird der Abstand $\text{dist}_{\text{hyp}}(0, \cdot) : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer monotonen, stetigen Bijektion. Mit der Wahl

$$\omega_{\text{dist}} := -1/2 \quad (5.3)$$

ist $\partial_Q \text{dist}_{\text{hyp}}(0, Q)|_{Q=0} = 1$, so dass nahe $P = 0$ die Abstandsmessung euklidisch wird.

Proposition 5.13 *Sind $-1 < P, Q < 1$, so stimmt der durch (5.2, 5.3) definierte hyperbolische Abstand von P und Q mit der doppelten Fläche überein, die durch die Hyperbel $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = \sqrt{1+x^2} \right\}$ und die Strahlen vom Ursprung durch $\begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Q \\ 1 \end{pmatrix}$ begrenzt wird.*



Beweis. Dank der Additivität des Abstandes ist o.B.d.A. $P = 0$. Sei $(H, \sqrt{1+H^2})^T$ der Schnittpunkt der Hyperbel mit dem Strahl durch $\begin{pmatrix} Q \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. $Q = H/\sqrt{1+H^2}$. Wir finden den Abstand

$$\text{dist}_{\text{hyp}}(0, Q) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+Q}{1-Q} = \ln \left(H + \sqrt{1+H^2} \right)$$

und die doppelte Fläche

$$2 \int_0^H \sqrt{1+x^2} dx - H\sqrt{1+H^2} = \left[x\sqrt{1+x^2} + \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right]_0^H - H\sqrt{1+H^2}.$$

Beide stimmen überein. \boxtimes

Verglichen mit der Klassifikation aus Abschnitt 5.3 sind die Längenmessungen entlang äußerer Geraden (2 verschiedene reelle Schnitte mit Ω) und die Winkelmessungen an äußeren Punkten (2 verschiedene reelle Tangenten an Ω) hyperbolisch.

5.4.2 Elliptische Längenmessung

Identifizieren wir $\mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto P$, und wählen o.B.d.A. $X = -\mathbf{i}$, $Y = \mathbf{i}$, so hat der Abstand (mit Vorzeichen) die Gestalt

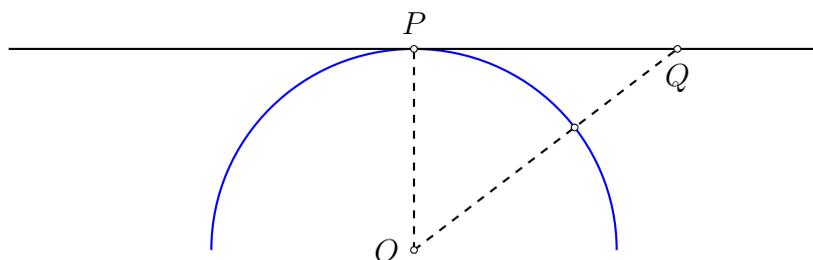
$$\text{dist}_{\text{ell}}(P, Q) = \omega_{\text{dist}} \ln \frac{(P + \mathbf{i})(Q - \mathbf{i})}{(P - \mathbf{i})(Q + \mathbf{i})}. \quad (5.4)$$

Der Quotient hat Norm 1, d.h. der Logarithmus ist rein imaginär. Halten wir einen Punkt $P = 0$ fest (und wählen $\omega_{\text{dist}} \in \mathbf{i}\mathbb{R} \setminus \{0\}$), so wird der Abstand $\text{dist}_{\text{ell}}(0, \cdot) : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbf{i}\omega_{\text{dist}}\mathbb{Z}$ zu einer stetigen Bijektion. Mit der Wahl

$$\omega_{\text{dist}} := -\mathbf{i}/2 \quad (5.5)$$

ist $\partial_Q \text{dist}_{\text{ell}}(0, Q)|_{Q=0} = 1$, so dass nahe $P = 0$ die Abstandsmessung euklidisch wird.

Proposition 5.14 *Sind $P, Q \in \mathbb{R}$, so stimmt der durch (5.4, 5.5) definierte elliptische Abstand von P und Q (modulo 2π) mit der doppelten Fläche überein, die durch den Kreis $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = \sqrt{1-x^2} \right\}$ und die Strahlen vom Ursprung durch $\begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Q \\ 1 \end{pmatrix}$ begrenzt wird.*



Beweis. Dank der Additivität des Abstandes ist o.B.d.A. $P = 0$. Wir finden den Abstand

$$\text{dist}_{\text{ell}}(0, Q) = \frac{1}{2\mathbf{i}} \ln \frac{\mathbf{i} - Q}{\mathbf{i} + Q} = \frac{1}{\mathbf{i}} \ln \frac{\mathbf{i} - Q}{\sqrt{1+Q^2}}.$$

Das Argument des Logarithmus ist der Schnittpunkt des Strahls durch Q mit dem Einheitskreis, aufgefasst als komplexe Zahl. Der Abstand ist also genau die Bogenlänge entlang des Einheitskreises zwischen den beiden Strahlen durch P und Q . \boxtimes

Verglichen mit der Klassifikation aus Abschnitt 5.3 sind die Längenmessungen entlang innerer Geraden (keine reellen Schnitte mit dem absoluten Kegelschnitt Ω) und die Winkelmessungen an inneren Punkten (keine reellen Tangenten an den absoluten Kegelschnitt Ω) elliptisch. Insbesondere ist wie Winkelmessung der euklidischen Ebene elliptisch, vergleiche Übung 5.6.

5.4.3 Parabolische (euklidische) Längenmessung

Ist $X = Y$, so ist der Abstand aus Definition 5.8 identisch Null. Trotzdem wollen wir einen regulären Abstand finden. In der Tat kennen wir einen Kandidaten: den euklidischen Abstand.

Die elliptische Längenmessung (5.4, 5.5) besitzt eine absolute Länge, den „Umfang der Welt“, der hier auf 2π normiert ist. Wählen wir $X = -\varepsilon^{-1}\mathbf{i}$, $Y = \varepsilon^{-1}\mathbf{i}$, so entspricht der Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ einem Übergang zum degenerierten Fall $X = Y = \infty$. Bei festem Koeffizienten ω_{dist} konvergiert auch die absolute Länge gegen ∞ , so dass in Relation alle Abstände verschwinden. Das Fehlen einer absoluten Länge zeigt sich auch in den Skalierungssymmetrien der zu Doppelgeraden entarteten absoluten Kegelschnitte.

Auch die hyperbolische Längenmessung (5.2, 5.3) besitzt eine solche absolute Länge, hier aber in imaginärer Richtung. Wählen wir $X = -\varepsilon^{-1}$, $Y = \varepsilon^{-1}$ bei festem Koeffizienten ω_{dist} , so degeneriert das Längenmaß im euklidischen Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ ebenfalls.

Halten wir jedoch im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ die Länge einer Referenzstrecke fest, so müssen wir ω_{dist} entsprechend mit ε^{-1} skalieren. Wie bei der Festlegung des Koeffizienten (5.3) können wir auch die Linearisierung in $P = 0$ festhalten. Der hyperbolische Abstand bezüglich $X = -\varepsilon^{-1}$, $Y = \varepsilon^{-1}$ wäre dann

$$\text{dist}_{\text{hyp},\varepsilon}(0, Q) = \omega_{\text{dist},\varepsilon} \ln \frac{1 - \varepsilon Q}{1 + \varepsilon Q}, \quad \omega_{\text{dist},\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon}.$$

Wir finden im (punktweisen) Grenzwert den euklidischen Abstand

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dist}_{\text{hyp},\varepsilon}(0, Q) = Q.$$

Den gleichen Grenzwert erhalten wir bei Skalierung des elliptischen Abstands.

Der euklidische Abstand setzt voraus, dass der Punkt $X = Y$ des absoluten Kegelschnitts die Koordinaten $(1, 0)^T$ besitzt. Im allgemeinen Fall ergibt sich der parabolische Abstand als projektive Skalierung: Legen $\underline{0}$, $\underline{1}$ die Einheitsstrecke fest und bezeichnet $\underline{\infty} = X = Y$ den Punkt des absoluten Kegelschnitts, so ist mit

$$\text{dist}_{\text{par}}(P, Q) = (\underline{0}, \underline{1}; Q, \underline{\infty}) - (\underline{0}, \underline{1}; P, \underline{\infty}) \tag{5.6}$$

der parabolische Abstand festgelegt.

Verglichen mit der Klassifikation aus Abschnitt 5.3 sind die Längenmessungen der euklidischen, der Galilei- und der Minkowski-Ebenen parabolisch. Gleiches gilt für die Winkelmessungen der dual-euklidischen, der Galilei- und der dual-Minkowski-Ebenen.

5.4.4 Desingularisierter Abstandsvergleich

Wir haben gesehen, dass ein nicht identisch verschwindender Abstandsbegriff bezüglich eines zur Doppelgeraden entarteten absoluten Kegelschnitts Ω auch von Ω^Δ abhängen muss. Entlang einer projektiven Geraden kann ein solcher Abstand als geeignet skalierter Grenzwert der Abstände bezüglich regulärer Kegelschnitte gefunden werden. Wir wollen daher auch für die projektive Ebene eine algebraisch handhabbare und auch für singuläre absolute Kegelschnitte (Ω, Ω^Δ) verwendbare Invariante der Kongruenzabbildungen konstruieren, die Abstandsvergleiche ermöglicht.

Für Längenvergleiche genügt im regulären Fall das Doppelverhältnis $(P, Q; X, Y)$, wobei Kehrwerte identifiziert werden sollten. Sind $P \not\sim Q$ feste Repräsentanten und $P, Q \notin \Omega$, so ergeben sich die Schnittpunkte $X, Y = \lambda P + \mu Q$ der Geraden $P \times Q$ mit dem absoluten Kegelschnitt Ω als

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^T \Omega Q \pm \sqrt{D} \\ \Omega[P] \end{pmatrix}, \quad D = (P^T \Omega Q)^2 - \Omega[P] \Omega[Q], \quad (5.7)$$

vergleiche (4.3). Das Doppelverhältnis ist also

$$(P, Q; X, Y) = \frac{P^T \Omega Q - \sqrt{D}}{P^T \Omega Q + \sqrt{D}} =: c_1, \quad (5.8)$$

bzw. dessen Kehrwert. Die Identifikation mit dem Kehrwert wird durch den symmetrischen Ausdruck

$$c_2 := \frac{c_1 + 1}{2\sqrt{c_1}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{c_1} + \frac{1}{\sqrt{c_1}} \right) = \frac{P^T \Omega Q}{\sqrt{\Omega[P] \Omega[Q]}} \quad (5.9)$$

geleistet, allerdings wieder mit evtl. mehrdeutigem Vorzeichen.

Übung 5.15 Für komplexe Zahlen $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos \frac{\ln w}{2i} = \frac{\sqrt{w} + 1/\sqrt{w}}{2} = \frac{w + 1}{2\sqrt{w}},$$

also mit $\omega_{\text{dist}} = 1/(2i)$ auch

$$\text{dist}(P, Q) = \frac{1}{2i} \ln(P, Q; X, Y) = \arccos \frac{P^T \Omega Q}{\sqrt{\Omega[P] \Omega[Q]}}.$$

Vergleiche im Fall der elliptischen Geometrie, $\Omega = \mathcal{I}$, die Abstandsmessung in \mathbb{RP}^2 mit der euklidischen Winkelmessung in \mathbb{R}^3 .

Bevor wir eine geeignete Reskalierung für singuläre Kegelschnitte finden, wandeln wir die Invariante nochmals ab:

$$c_3 := 1 - c_2^2 = \frac{\Omega[P]\Omega[Q] - (P^T\Omega Q)^2}{\Omega[P]\Omega[Q]} = \frac{\Omega^\Delta[P \times Q]}{\Omega[P]\Omega[Q]}. \quad (5.10)$$

Die Gleichheit verlangt hier, dass für Ω^Δ die Adjunkte (symmetrische Kofaktormatrix) von Ω verwendet wird. Als Invariante genügt natürlich auch jedes skalare Vielfache.

Übung 5.16 Sei \mathcal{C}^Δ die (transponierte) Kofaktor-Matrix zur (3×3) -Matrix \mathcal{C} , die als symmetrisch angenommen werden darf (aber nicht muss). Zeige

$$\mathcal{C}^{\Delta T}(P \times Q) = \mathcal{C}P \times \mathcal{C}Q.$$

(Äquivalenz folgt bereits aus der Inzidenzerhaltung der Polarität.)

Übung 5.17 Sei \mathcal{C}^Δ die (transponierte) Kofaktor-Matrix zur (3×3) -Matrix \mathcal{C} , die als symmetrisch angenommen werden darf (aber nicht muss). Zeige

$$\mathcal{C}^\Delta[P \times Q] = \mathcal{C}[P]\mathcal{C}[Q] - (P^T\mathcal{C}Q)(Q^T\mathcal{C}P).$$

Ungeachtet der Herleitung ist offensichtlich, dass (5.10) unter Spiegelungen mit einem konstanten Faktor skaliert wird, der unabhängig von den Punkten ist, siehe (5.1). Also ist durch gleiche Werte c_3 eine Relation auf den Punktepaaren definiert, die invariant unter Kongruenzabbildungen der Geometrie ist. (Die Invariante ist unabhängig von Skalierungen der Argumente P, Q .) Statt der Adjunkten kann ein beliebiges Vielfaches verwendet werden, also auch die (desingularisierten) dualen Matrizen der singulären Kegelschnitte. In der Tat bleibt (5.10) auch für singuläre absolute Kegelschnitte regulär: Zu einer gegebenen (nicht tangentialen) Geraden durch $P \notin \Omega$ und gegebenem Wert c_3 finden wir die zwei Punkte Q als Lösungen einer nicht-degenerierten quadratischen Gleichung. Lediglich auf die Additivität der Metrik mussten wir verzichten.

Bemerkung 5.18 Folgende Invarianten der Kongruenzabbildungen bezüglich des absoluten Kegelschnitts (Ω, Ω^Δ) können (auch in singulären Geometrien) zu Abstands- und Winkelvergleichen benutzt werden:

$$\text{inv}_{(\Omega, \Omega^\Delta)}(P, Q) = \frac{\Omega^\Delta[P \times Q]}{\Omega[P]\Omega[Q]}, \quad \text{inv}_{(\Omega, \Omega^\Delta)}(g, h) = \frac{\Omega[g \times h]}{\Omega^\Delta[g]\Omega^\Delta[h]}, \quad (5.11)$$

Übung 5.19 Vergleiche $\text{inv}_{(\Omega, \Omega^\Delta)}(P, Q)$ im Falle der singulären Normalformen der Klassifikation aus Abschnitt 5.3 mit den bekannten Metriken der euklidischen, Galilei- und Minkowski-Ebenen.

Jetzt können wir die Geometrien auch über ihre Abstands- und Winkelmessungen charakterisieren (vergleiche mit Abschnitt 5.3):

Der Winkel $\text{ang}_{(\Omega, \Omega^\Delta)}$ von Geraden ist	Der Abstand $\text{dist}_{(\Omega, \Omega^\Delta)}$ von Punkten ist		
	elliptisch	parabolisch	hyperbolisch
elliptisch	Elliptisch	Euklidisch	Beltrami/Klein
parabolisch	Dual-euklidisch	Galilei	Dual-Minkowski
hyperbolisch	Anti-deSitter	Minkowski	DeSitter

5.5 Spiegelungen & Orthogonalität

Die die Kongruenzabbildungen der Geometrie erzeugenden Spiegelungen wurden in Abschnitt 5.1 über die durch den absoluten Kegelschnitt vermittelte Polarität charakterisiert. In der hyperbolischen Ebene können Pole und Polaren allein mit dem Lineal (bei gegebenem absoluten Kegelschnitt) konstruiert werden, siehe Übungen 4.15 und 4.16. (Tangenten an den absoluten Kegelschnitt sind dann auch konstruierbar.)

Spiegelungen definieren Orthogonalität: Das Bündel der sich in einem Pol schneidenden Geraden ist das Normalenbündel der zugehörigen Polaren. Beachte, dass orthogonalen Geraden nur bei elliptischer Winkelmessung ein endlicher, reeller Winkel zugeordnet ist!

In der euklidischen Ebene sind die Normalenbündel Bündel paralleler Geraden, die sich auf Ω (der Ferngeraden) schneiden. Gleichzeitig ist die Polare jedes Punktes die Ferngerade. Daher können Spiegelungen, die stets ein Paar aus Gerade und nicht-inzidentem Punkt fixieren, in Punkt- und Geradenspiegelungen getrennt werden.

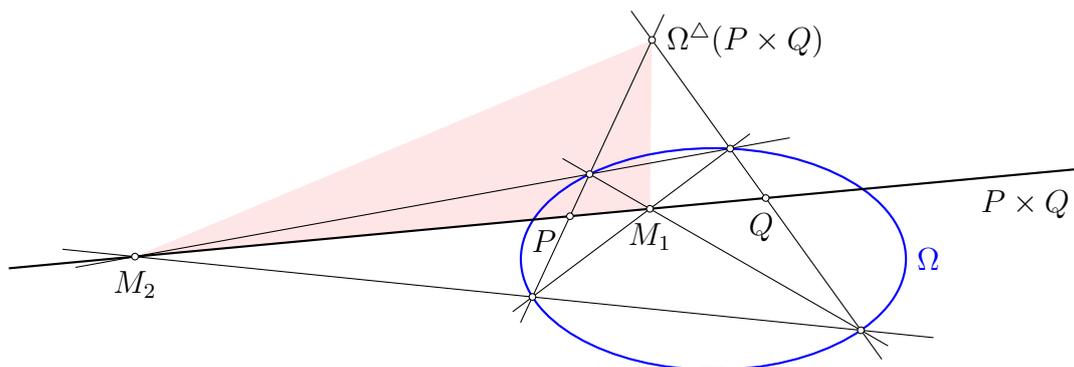
Zurück zur hyperbolischen Ebene eignen sich äußere Punkte und Geraden (also die de-Sitter-Welt) besonders gut zur Visualisierung, da dann Tangenten an den und Schnitte mit dem absoluten Kegelschnitt reell sind.

Tauscht eine Spiegelung zwei Punkte P, Q aus, so lässt sie deren Mittelpunkte invariant. Ist $P \neq Q$, so liegt das Spiegelungszentrum auf ihrer Verbindungsgeraden, die außerdem von der Spiegelungsgeraden geschnitten wird.

Definition 5.20 *Das Spiegelzentrum einer jeden Spiegelung, die die Punkte P und Q vertauscht, heißt Mittelpunkt von P und Q .*

Wir finden zwei Mittelpunkte: Liegen P, Q nicht auf einer gemeinsamen Tangenten, so schneiden die beiden Lote in P, Q auf die Verbindungsgerade den absoluten Kegelschnitt

in vier Punkten. Die Diagonalpunkte dieses Vierecks sind der Pol von $P \times Q$ und die beiden Mittelpunkte. Die P und Q vertauschenden Spiegelungen sind gegeben durch das Zentrum in einem der Mittelpunkte und den Spiegel durch den Pol und den anderen Mittelpunkt. Das Dreieck aus Pol und Mittelpunkten besitzt drei paarweise orthogonale Seiten. Wir nennen es selbst-polar, siehe Definition 5.21 unten.



Algebraisch sind die baryzentrischen Koordinaten der Mittelpunkte $M = \lambda P + \mu Q$ Lösungen von $\text{inv}(P, M) = \text{inv}(M, Q)$, vergleiche (5.11). Wir finden die Mittelpunkte

$$M \sim \sqrt{\Omega[Q]}P \pm \sqrt{\Omega[P]}Q, \quad (5.12)$$

die sogar für P, Q auf einer gemeinsamen Tangente Sinn machen: Sie sind die eindeutigen Fixpunkte (auf $P \times Q$) unter Spiegelungen, die P und Q vertauschen, auch wenn allgemeine Kongruenzen beliebige Punkte der Tangente aufeinander abbilden können. In jedem Falle existieren nur dann reelle Mittelpunkte, wenn $\text{sgn } \Omega[P] = \text{sgn } \Omega[Q]$, d.h. wenn P, Q beide innere oder beide äußere Punkte sind, sie also nicht durch den absoluten Kegelschnitt getrennt werden. In der euklidischen Ebene liegt einer der Mittelpunkte auf der Ferngeraden.

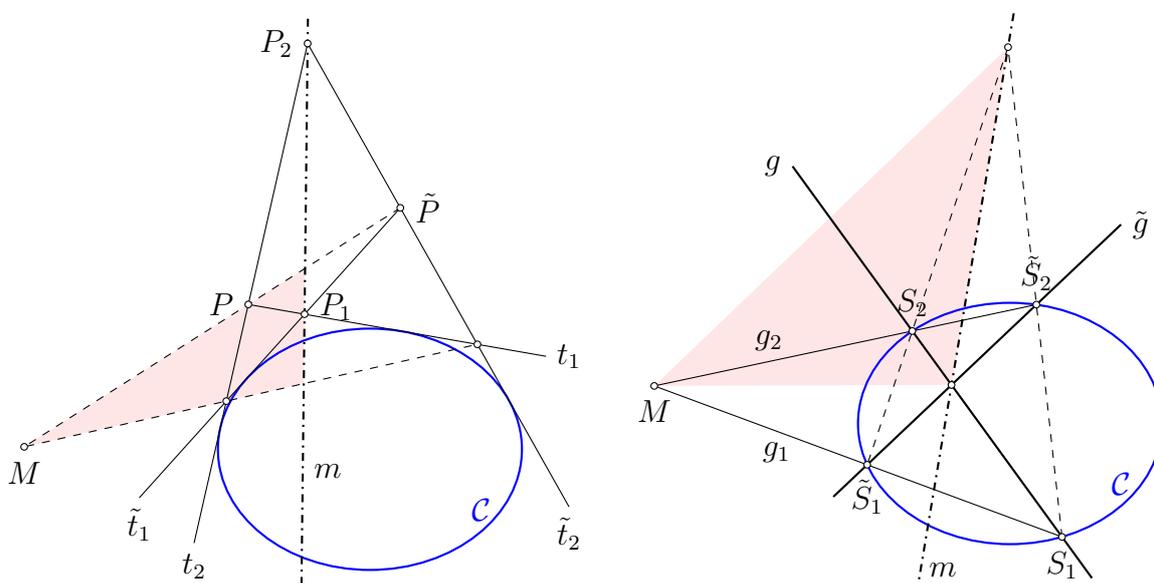
Definition 5.21 *Bildet in einem Dreieck $D_1D_2D_3$ jeder Eckpunkt mit der gegenüberliegenden Seite ein Pol-Polare-Paar bezüglich eines Kegelschnitts $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$, so nennen wir das Dreieck (bezüglich des Kegelschnitts) selbst-polar.*

Proposition 5.22 *Die Diagonaldreiecke jedes Sehnenvierecks und jedes Tangentenvierseits eines regulären Kegelschnitts sind zu diesem selbst-polar.*

Beweis. Aufgrund der Dualität betrachten wir o.B.d.A. ein beliebiges Sehnenviereck des Kegelschnitts. Sei M ein Diagonalpunkt und m seine Polare. Die durch M, m definierte Spiegelung lässt den Kegelschnitt und die zwei durch M gehenden Vierecksseiten invariant, tauscht also die Eckpunkte des Sehnenvierecks paarweise. Die anderen beiden Diagonalpunkte bleiben deshalb jeweils invariant, müssen also auf m liegen. \boxtimes

Übung 5.23 Zeige, dass Proposition 5.22 auch für singuläre Kegelschnitte gilt, sofern das Viereck/Vierseit in allgemeiner Lage ist (keine 3 Ecken/Seiten kollinear/konkurrent).

Generell können Spiegelbilder durch harmonische Ergänzung konstruiert werden, siehe Abschnitte 3.1 und 3.3. In der hyperbolischen Ebene (mit gegebenem absoluten Kegelschnitt) können wir Spiegelbilder äußerer Punkte (d.h. mit reellen Tangenten an den Kegelschnitt) nun auch über Tangentenvierseite konstruieren. Dual dazu sind Spiegelbilder äußerer Geraden (d.h. den Kegelschnitt reell schneidender Linien) über Sehnenvierecke bestimmt. Innere Punkte können als Schnitt äußerer Geraden gespiegelt werden, und innere Geraden als Geraden durch zwei äußere Punkte.



Links: Die Tangenten t_1, t_2 durch den Urbild-Punkt P an den Kegelschnitt \mathcal{C} schneiden den Spiegel m in den Punkten P_1, P_2 . Die anderen Tangenten \tilde{t}_1, \tilde{t}_2 durch P_1, P_2 an den Kegelschnitt \mathcal{C} schneiden sich im Bildpunkt \tilde{P} . Rechts: Die Schnittpunkte S_1, S_2 der Urbild-Geraden g mit dem Kegelschnitt \mathcal{C} liegen mit dem Spiegelzentrum M auf zwei Geraden g_1, g_2 . Diese schneiden den Kegelschnitt \mathcal{C} in zwei weiteren Punkten \tilde{S}_1, \tilde{S}_2 . Die Gerade \tilde{g} durch \tilde{S}_1, \tilde{S}_2 ist das Spiegelbild von g .

Übung 5.24 Gib (alternative) Konstruktionen des Spiegelbilds eines inneren Punktes an.

Übung 5.25 Sei ein Dreieck äußerer Punkte des regulären absoluten Kegelschnitts gegeben. Zeige durch Anwendung des Satzes von Brianchon, dass die drei Paare von Mittelsenkrechten ein vollständiges Viereck bilden. (Die Ecken sind die Umkreismittelpunkte.) Zeige auch, dass die 3 Paare von Mittelpunkten ein vollständiges Vierseit bilden. (Die Seiten sind die In- und Ankreismittelpunkte aus dualer Sicht.)

5.6 Die Minkowski Ebene

Sei der absolute Kegelschnitt durch

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega^\Delta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, vergleiche Abschnitt 5.3. Wählen wir unsere gewohnte Normierung $\{z = 1\}$, um Punkte durch Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ darzustellen, ist der absolute Kegelschnitt — wie für die euklidische Ebene — die (doppelte) Ferngerade $\{z = 0\}$. Allerdings sind die absoluten Pole $(\pm 1, 1, 0)^T$ im Gegensatz zur euklidischen Ebene reell.

Die Invariante (5.11) der Abstandsmessung hat für Punkte $P = (x_1, t_1, 1)^T$, $Q = (x_2, t_2, 1)^T$ die Form

$$\text{inv}_{(\Omega, \Omega^\Delta)}(P, Q) = \frac{\Omega^\Delta[P \times Q]}{\Omega[P]\Omega[Q]} = (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2.$$

Das ist gerade die Metrik der Minkowski-Welt,

$$ds^2 = dt^2 - dx^2,$$

mit Zeit $t = y$ und (eindimensionalem) Ort x . (Wir folgen hier den Konventionen, in Orts-Zeit-Diagrammen den Ort auf der Abszissenachse und die Zeit auf der Ordinatenachse abzutragen und die Bogenlänge von Weltlinien positiv zu wählen.) Weltlinien kann man als Ortsmarkierungen auf einem nach unten durchlaufenden Registrierstreifen interpretieren.

Die Linien $dx = \pm dt$ heißen Lichtlinien. Sie sind die Weltlinien (Registrierkurven) von Lichtsignalen. Sie verlaufen durch die absoluten Pole. Es sind die Tangenten an den absoluten Kegelschnitt. In euklidischen Augen erscheinen sie (dank unserer Normierung des Kegelschnitts) als Winkelhalbierende der Achsen. Entlang Lichtlinien sind alle Abstände Null. Lichtlinien werden unter allen Ähnlichkeitsabbildungen $\text{Sim}_{\mathbb{R}}(\Omega, \Omega^\Delta)$ und insbesondere unter allen Kongruenzabbildungen $\text{Cong}_{\mathbb{R}}(\Omega, \Omega^\Delta)$ auf Lichtlinien abgebildet. Das ist die sogenannte „Konstanz“ der Lichtgeschwindigkeit. Kurven mit $|dx| < |dt|$ nennen wir zeitartig, Kurven mit $|dx| > |dt|$ raumartig.

Die Diagonalen eines jeden Vierseits aus Lichtlinien (in allgemeiner Lage, d.h. keine 3 Lichtlinien konkurrent, d.h. durch jeden der beiden absoluten Pole zwei Linien) sind orthogonal, vergleiche Übung 5.23. In euklidischen Augen sind solche Lichtseite gerade die Rechtecke mit um 45 Grad gegen die Achsen gedrehten Seiten. Die Minkowski-Geometrie hat eine hyperbolische Winkelmessung: Der Winkel einer Lichtlinie zu jeder anderen Linie

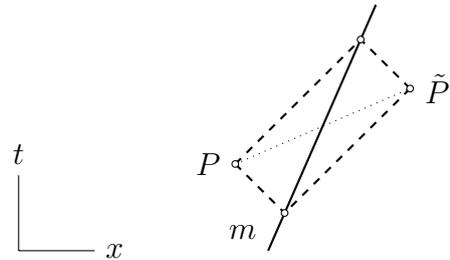
ist unendlich. Die Diagonalen eines Lichtecks sind zwar orthogonal, werden jedoch durch die Lichtlinien getrennt. Eine der Diagonalen ist zeitartig, eine raumartig; und sie haben keinen mit unserem hyperbolischen Winkelbegriff messbaren (reellen) Winkel.

Die die Spiegelungen der Geometrie erzeugenden Pol-Polare Paare bestehen aus einer Gerade (die nicht die Ferngerade ist) und ihrem Pol auf der Ferngeraden, oder aus einem Punkt (nicht auf der Ferngeraden) und der Ferngeraden als seine Polare. Wir können also — wie für die euklidische Ebene — Punkt- und Geradenspiegelungen unterscheiden.

Übung 5.26 *Jede Punktspiegelung ist das Produkt zweier Geradenspiegelungen an (in der Minkowski-Geometrie!) orthogonalen Geraden.*

Wir betrachten also nur die Geradenspiegelungen. Der Pol des Spiegels ist der Schnittpunkt seiner Lote und liegt auf der Ferngeraden. Die Spiegelgerade selbst (sofern zeitartig) kann man sich als Weltlinie eines bewegten Spiegels vorstellen.

Im Spiegel sind orthogonale Geraden und Spiegelbilder durch Lichtseite bestimmt. Das Spiegelbild \tilde{P} eines Punktes P in einem Spiegel m ist die gegenüberliegende Ecke des Lichtseits. Die Gerade durch P, \tilde{P} ist ein Lot auf m .



Inbesondere finden wir die Spiegelungen

$$(x, t) \mapsto (x_0 - x, t) \quad \text{und} \quad (x, t) \mapsto (x, t_0 - t)$$

an zu den Achsen parallelen Spiegeln. Die Hintereinanderausführungen dieser Spiegelungen erzeugen die Translationen

$$(x, t) \mapsto (x_0 + x, t_0 + t).$$

Eine allgemeine Spiegelung an einem Spiegel $m = (\xi, \tau, 0)$, der o.B.d.A. durch den Koordinatenursprung verläuft, hat die Form

$$\mathcal{R}_m = \text{Invol}(\Omega^\Delta m, m) = \Omega^\Delta[m]\mathcal{I} - 2\Omega^\Delta m m^T = \begin{pmatrix} -\xi^2 - \tau^2 & -2\xi\tau & \\ 2\xi\tau & \xi^2 + \tau^2 & \\ & & \xi^2 - \tau^2 \end{pmatrix},$$

vergleiche (3.3). Normierung der z -Koordinate liefert

$$\mathcal{R}_m : \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \mapsto \frac{\xi^2 + \tau^2}{\xi^2 - \tau^2} \begin{pmatrix} -1 & \frac{-2\xi\tau}{\xi^2 + \tau^2} \\ \frac{2\xi\tau}{\xi^2 + \tau^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet v die Relativgeschwindigkeit der Bezugssysteme, d.h. den Winkel des Bildes von $\{x = 0\}$ zur stationären Weltlinie $\{x = 0\}$, und γ den Lorentz-Faktor,

$$v = -\frac{2\xi\tau}{\xi^2 + \tau^2}, \quad \gamma = \frac{\xi^2 + \tau^2}{|\xi^2 - \tau^2|} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad c = 1 > |v|,$$

so finden wir die (eigentlichen orthochronen) Lorentz-Transformationen,

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \mapsto \gamma \begin{pmatrix} x - vt \\ t - vx/c^2 \end{pmatrix}, \quad c = 1,$$

als Spiegelungen an zeitartigen Spiegeln ($|\xi| > |\tau|$) mit Ortsumkehr ($x \mapsto -x$) und als Spiegelungen an raumartigen Spiegeln ($|\xi| < |\tau|$) mit Zeitumkehr ($t \mapsto -t$).

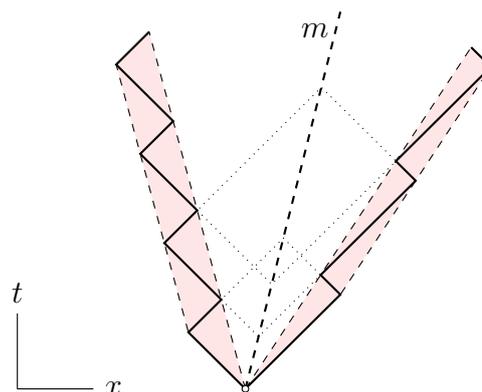
Die Gruppe der durch den eine Doppelgerade mit reellen absoluten Polen (als absolutem Kegelschnitt) erzeugten Kongruenzen ist daher das semidirekte Produkt der Lorentz-Gruppe mit den Verschiebungen

$$\text{Cong}_{\mathbb{R}}(\text{diag}(0, 0, 1), \text{diag}(1, -1, 0)) = \mathbb{R}^2 \rtimes O(1, 1).$$

Sie hat vier Zusammenhangskomponenten, die durch Raum- und/oder Zeitumkehr ineinander übergehen. Wie in der euklidischen Ebene finden wir auch Ähnlichkeitsabbildungen durch Verknüpfung der Kongruenzen mit zentrischen Steckungen. Alle diese Abbildungen bilden zeitartige Linien stets auf zeitartige Linien und raumartige Linien auf raumartige Linien ab. Die schon in Abschnitt 5.1 angesprochenen Ausnahmen, die raum- und zeitartige Linien ineinander spiegeln, haben in Minkowski-Räumen höherer Dimension keine Entsprechungen.

Die Vorstellung einer Uhr als Zählung der Perioden eines Lichtstrahls zwischen zwei Spiegeln veranschaulicht, dass die Eigenzeit eines Beobachters durch das Abstandsmaß entlang seiner (zeitartigen) Weltlinie gegeben ist.

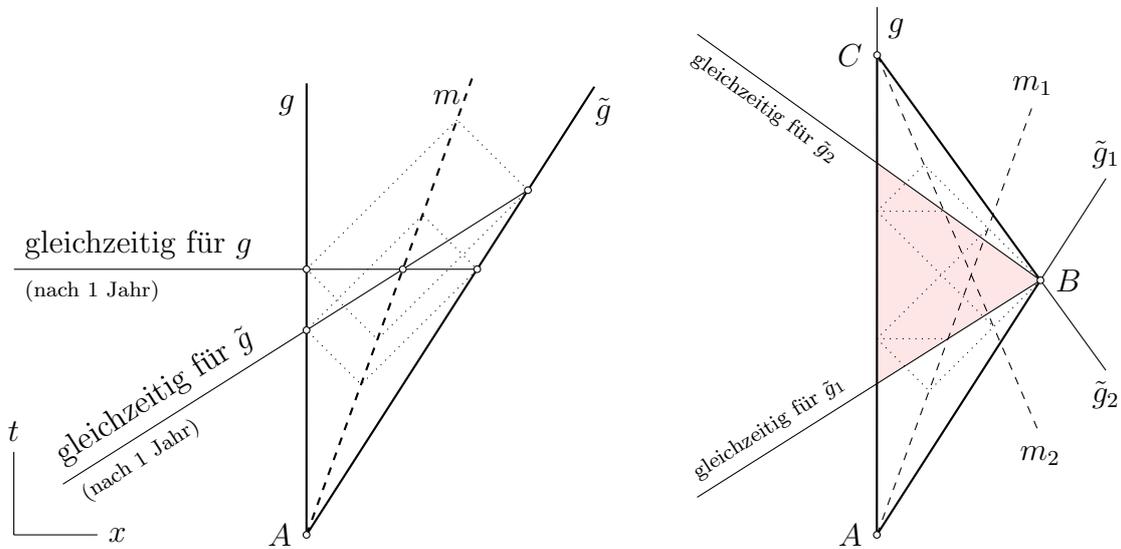
Die Abbildung zeigt zwei identische (spiegelbildliche) Uhren, die sich gegeneinander bewegen.



Das Zwillingsparadoxon, das keine Besprechung des Minkowski-Raumes auslassen kann, erweist sich als äquivalent zur euklidischen Dreiecksungleichung — und damit als genauso „paradox“ wie diese:

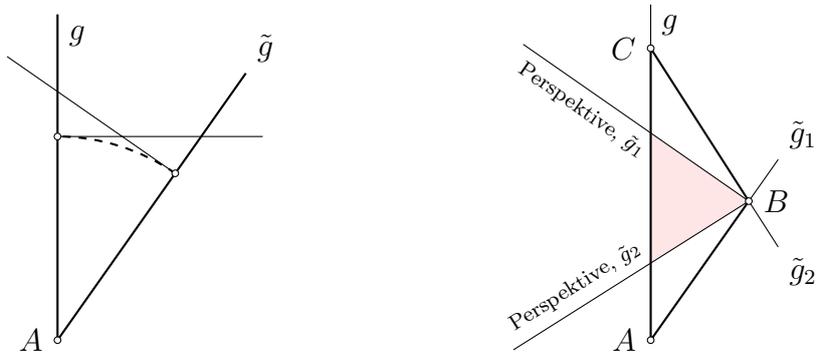
Zwei Zwillinge g, \tilde{g} starten im Punkt A und bewegen sich entlang unterschiedlicher Weltlinien. Aus der Perspektive (subjektiver Gleichzeitigkeit) jedes der Zwillinge altert der andere langsamer, da Abstände in der Projektion länger werden. Der im Punkt B umkehrende Zwilling wechselt dort seine Perspektive, wodurch ein Teil der Weltlinie des anderen Zwillings in seiner Bilanz fehlt. Treffen sich beide im Punkt C , so stimmt nur die Bilanz des daheim gebliebenen Zwillings und zeigt die korrekte Altersdifferenz

$$\text{dist}_{\text{Mink}}(A, C) \geq \text{dist}_{\text{Mink}}(A, B) + \text{dist}_{\text{Mink}}(B, C).$$

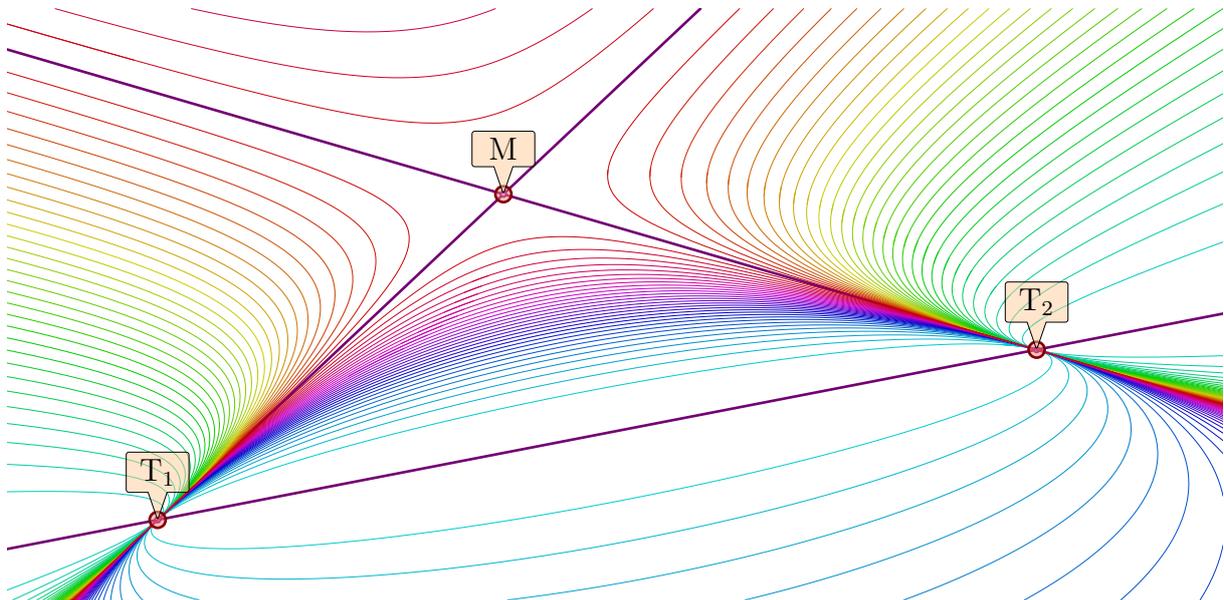


In der euklidischen Ebene werden Abstände unter (orthogonaler) Perspektive kürzer. Aus Sicht beider Geraden durch A ist der Weg entlang der anderen Geraden länger. In B wechselt jedoch die Perspektive, wodurch die Bilanz einen Teil der anderen Wegstrecke doppelt zählt. In C stimmt also nur die Bilanz entlang der direkten Verbindung und zeigt die korrekte Dreiecksungleichung

$$\text{dist}_{\text{eukl}}(A, C) \leq \text{dist}_{\text{eukl}}(A, B) + \text{dist}_{\text{eukl}}(B, C).$$



6 Kreise



6.1 Metrische Charakterisierung

Schon in der Schule lernen wir: ein Kreis ist der Menge aller Punkte P mit festem Abstand $\text{dist}_{(\Omega, \Omega^\Delta)}(P, M)$ von seinem Mittelpunkt M ,

$$\text{dist}_{(\Omega, \Omega^\Delta)}(P, M) = \text{const.} \quad (6.1)$$

In Abschnitt 5.4 haben wir Abstand und Winkel aus dem Doppelverhältnis konstruiert und die besser handhabbaren Invarianten (5.11) gefunden. Ein Kreis ist der Menge aller Punkte P mit festem Wert der Invariante (5.11) zu seinem Mittelpunkt M ,

$$\text{inv}_{(\Omega, \Omega^\Delta)}(P, M) = \text{const.} \quad (6.2)$$

Beide Charakterisierungen sind äquivalent, sofern der (reelle) Abstand überhaupt existiert, d.h. Kreis und Mittelpunkt auf derselben Seite des absoluten Kegelschnitts liegen. Bezeichnet \mathcal{X}_M wieder das Vektorprodukt mit M , so charakterisiert (6.2) die konzentrischen Kreise mit Mittelpunkt M als Bündel von Kegelschnitten

$$\left\{ \lambda \Omega + \mu \mathcal{X}_M^T \Omega^\Delta \mathcal{X}_M \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}P^1 \right\}. \quad (6.3)$$

Das Bündel ist genau dann trivial, wenn M im Kern von Ω liegt. Andernfalls ist es genau dann regulär, wenn Ω^Δ wenigstens Rang 2 hat. ($M \in \Omega$ kann aber erlaubt werden.)

Dabei ist $\mathcal{X}_M^T \Omega^\Delta \mathcal{X}_M$ der singuläre Kegelschnitt, der in die beiden Tangenten durch M an Ω zerfällt, vergleiche Übung 4.7. Die gemeinsamen Punkte der konzentrischen Kreise sind also die beiden Berührungspunkte der Tangenten durch den Mittelpunkt. Das Bündel ist nicht „in allgemeiner Lage“: Es enthält neben dem Tangentenpaar nur noch die Doppelgerade durch die Berührungspunkte T_1, T_2 als weiteren singulären Kegelschnitt. (Im Spezialfall der **Horozyklen**, Abschnitt 8.2, fallen beide Berührungspunkte genauso wie beide singulären Elemente des Bündels zusammen.)

Kreis zu sein, wird zu einer symmetrischen Relation zwischen Kegelschnitten. In einem Bündel konzentrischer Kreise kann jeder Kegelschnitt zum absoluten erklärt werden, alle anderen werden dann zu Kreisen der Geometrie.

Sind $P \neq M \notin \ker \Omega$ gegeben, so finden wir den Kreis um M durch P als Kegelschnitt zur Matrix

$$(\mathcal{X}_M^T \Omega^\Delta \mathcal{X}_M)[P] \Omega - \Omega[P] \mathcal{X}_M^T \Omega^\Delta \mathcal{X}_M. \quad (6.4)$$

Die Kreise mit Mittelpunkt im Kern von Ω sind nicht durch einen einzelnen Peripheriepunkt gegeben. Hat z.B. Ω^Δ Rang 1, so ist der Mittelpunkt jedes regulären Kreises der absolute Pol und hat daher nicht die Gestalt (6.4).

6.2 Charakterisierung durch Spiegelungen

Spiegelungen erhalten Abstände von Punkten und die Invarianten (5.11). Kreise werden also durch Spiegelungen an beliebigen ihrer Durchmesser (d.h. Geraden durch den Mittelpunkt M) auf sich abgebildet. Ein (regulärer) Kreis ist der Orbit eines (Peripherie-) Punktes unter der durch die Spiegelungen an den Geraden eines Bündels (durch den Mittelpunkt) erzeugten Gruppe von Kongruenzen. Dank Theorem 5.2 und der anschließenden Diskussion heißt das: Ein (regulärer) Kegelschnitt \mathcal{C} ist ein Kreis, falls der Pol jedes Durchmessers bezüglich \mathcal{C} mit dem Pol bezüglich Ω übereinstimmt. Dank Stetigkeit muss das auch für die Tangenten t_1, t_2 an Ω , an denen wir nicht spiegeln können, gelten. Also berühren sich \mathcal{C} und Ω in den Polen T_1, T_2 dieser Tangenten. Die Pole der Durchmesser bilden eine Gerade m , die Polare des Mittelpunktes M bezüglich beider Kegelschnitte. Dies ist die singuläre Doppelgerade des Bündels (6.3):

$$\left\{ \lambda \Omega + \mu (t_1 t_2^T + t_2 t_1^T) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}P^1 \right\} = \left\{ \tilde{\lambda} \Omega + \tilde{\mu} m m^T \mid (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \in \mathbb{K}P^1 \right\}. \quad (6.5)$$

Beachte dabei, dass $\mathcal{X}_M^T \Omega^\Delta \mathcal{X}_M \sim t_1 t_2^T + t_2 t_1^T$.

Die Gerade m wird nun zum Mittelpunkt der dualen Kreise $\mathcal{C}^\Delta, \Omega^\Delta$. Es sind dieselben Spiegelungen, die die dualen Kreise invariant lassen. Diese Dualität zusammen mit

Definition 5.1 erlaubt die konsistente Definition von Kreisen auch in den singulären Fällen:

Definition 6.1 *Zwei Kegelschnitte $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ und $(\mathcal{D}, \mathcal{D}^\Delta)$ heißen einander Kreis, wenn es ein gemeinsames Pol-Polare-Paar (M, m) gibt, so dass sowohl $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}, mm^T\}$ als auch $\{\mathcal{C}^\Delta, \mathcal{D}^\Delta, MM^T\}$ linear abhängig sind. M ist dann der gemeinsame Mittelpunkt und m der gemeinsame duale Mittelpunkt.*

Sind $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ und $(\mathcal{D}, \mathcal{D}^\Delta)$ einander Kreis, so auch $(\mathcal{C}^\Delta, \mathcal{C})$ und $(\mathcal{D}^\Delta, \mathcal{D})$ — mit (dualem) Mittelpunkt m . Metrisch heißt das: die Tangenten an den Kreis $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ haben bezüglich des absoluten Kegelschnitts $(\mathcal{D}, \mathcal{D}^\Delta)$ alle den gleichen Winkel zu m . In der euklidischen Ebene ist das nicht nachvollziehbar, da der duale Mittelpunkt m regulärer Kreise dort stets die Ferngerade ist und somit alle Winkel zu ihr unbestimmt sind.

Übung 6.2 *Zwei Kegelschnitte $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ und $(\mathcal{D}, \mathcal{D}^\Delta)$ sind genau dann einander Kreis, wenn die Büschel $\{\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}\}$ und $\{\tilde{\lambda}\mathcal{C}^\Delta + \tilde{\mu}\mathcal{D}^\Delta\}$ beide singulär oder zueinander dual sind, d.h. ein Büschel enthält die Adjunkten des anderen Büschels.*

Beide Büschel enthalten dann (mindestens / im regulären Fall genau) ein Element vom Rang 1 und sind von der Form (6.5).

Übung 6.3 *Sind zwei Kegelschnitte einander Kreis, d.h. erfüllen sie Definition 6.1, so liegen alle Durchmesser im Kern von MM^T . Also stimmen zu gegebenem Durchmesser (d.h. Geraden durch den Mittelpunkt M) die Pole bezüglich aller regulären Elemente des Büschels überein. Genauso liegen alle Punkte des dualen Mittelpunkts m im Kern von mm^T . Also stimmen zu gegebenem dualen Durchmesser (d.h. Punkt auf dem dualen Mittelpunkt m) die Polaren bezüglich aller regulären Elemente des Büschels überein.*

Wird also ein beliebiger Kegelschnitt des Kreisbüschels (6.5) zum absoluten erklärt, so sind alle anderen Elemente des Büschels invariant unter allen Spiegelungen an beliebigen Geraden durch den gemeinsamen Mittelpunkt und an beliebigen Punkten auf ihrem gemeinsamen dualen Mittelpunkt. Das Kreisbüschel ist tatsächlich eine Schar konzentrischer Kreise entsprechend der Ausgangsbetrachtungen dieses Abschnitts. In der euklidischen Ebene liegen die Pole aller Durchmesser auf der Ferngeraden und zwar jeweils im Schnittpunkt der (parallelen) Tangenten in den gegenüberliegenden Peripheriepunkten.

Definition 6.4 *Zwei Kegelschnitte berühren sich, wenn es ein gemeinsames Pol-Polare-Paar (T, t) mit $T \in t$ gibt. Die Berührung (T, t) besteht aus Berührungspunkt T und Berührungstangente t .*

Proposition 6.5 *Zwei Kegelschnitte sind genau dann einander Kreis, wenn sie sich ausschließlich berühren, d.h. wenn jeder Schnittpunkt (auch die komplexen!) ein Berührungspunkt und jede gemeinsame Tangente eine Berühr-Tangente ist.*

Beweis. Ist einer der Kegelschnitte regulär, so folgt die Behauptung aus den Vorbetrachtungen. Sind beide Kegelschnitte singulär, so ist die Fallunterscheidung der Leserschaft als Übung überlassen. \boxtimes

Ist wenigstens einer der Kegelschnitte regulär, so gibt es (höchstens) zwei Berührungen, die wir als doppelte Schnittpunkte und doppelte gemeinsame Tangenten (von denen es mit Vielfachheit je 4 gibt) auffassen können. Den Fall einer doppelten Berührung (im Pol-Polare-Paar $M \in m$ des Kreisbüschels) werden wir in Abschnitt 8.2 Horozyklen nennen.

Übung 6.6 *Die Kreise der elliptischen und hyperbolischen Ebenen (Ω regulär) bilden reguläre Büschel der Form (6.3):*

$$\left\{ \lambda\Omega + \mu\mathcal{X}_M^T\Omega^\Delta\mathcal{X}_M \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}P^1 \right\} = \left\{ \tilde{\lambda}\Omega + \tilde{\mu}\Omega MM^T\Omega \mid (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \in \mathbb{K}P^1 \right\}. \quad (6.6)$$

Singuläre Kreise sind also Tangentenpaare durch den Mittelpunkt oder Doppelgeraden mit absoluten Polen in den Schnittpunkten mit Ω .

Übung 6.7 *Die regulären Kreise der euklidischen Ebene berühren den absoluten Kegelschnitt in den absoluten Polen, vergleiche Übung 5.5. Die singulären Kreise der euklidischen Ebene sind Geradenpaare (einschließlich Doppelgeraden) mit Schnittpunkt (oder einem ihrer absoluten Pole) auf der Ferngeraden.*

Übung 6.8 *Die regulären Kreise der Minkowski-Ebene in der Standard-Einbettung aus Abschnitt 5.3 sind euklidische Hyperbeln durch die absoluten Pole $(\pm 1, 1, 0)^T$ (als Berührungspunkte), d.h. mit horizontaler und vertikaler Symmetrie-Achse und diagonalen Asymptoten. Die singulären Kreise stimmen mit denen der euklidischen Ebene überein.*

Übung 6.9 *Die regulären Kreise der Galilei-Ebene in der Standard-Einbettung aus Abschnitt 5.3 sind euklidische Parabeln durch den absoluten Pol $(1, 0, 0)^T$ (als doppelten Berührungspunkt), d.h. mit horizontaler Symmetrie-Achse. Die singulären Kreise stimmen mit denen der euklidischen Ebene überein.*

Übung 6.10 *Beschreibe die Kreise der dual-euklidischen und dual-Minkowski-Geometrien als duale Kreise der euklidischen und Minkowski-Geometrien.*

6.3 Umkreise, Inkreise und Ankreise

„Der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.“ Diese euklidischen Sätze gelten auch in den anderen 8 Geometrien. Allerdings finden wir 3 Paare von Mittelsenkrechten, die dank des Satzes von Brianchon ein vollständiges Viereck bilden, vergleiche Übung 5.25. (Das Diagonaldreieck dieses Vierecks ist das zum Ausgangsdreieck polare Dreieck.) Im Euklidischen sind drei der Umkreise singulär; sie bilden Paare paralleler Geraden, und ihre Mittelpunkte liegen auf der Ferngerade.

Genauso finden wir 3 Paare von Winkelhalbierenden (wie schon in der euklidischen Ebene, wenn wir auch die Ankreise zulassen), die ebenfalls ein vollständiges Viereck bilden. (Dessen Diagonaldreieck ist das Ausgangsdreieck.)

Umkreise sind die dualen Kreise der In- und Ankreise des dualen Dreiecks in der dualen Geometrie. Deren Mittelpunkte sind die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden. Zurück aus der Dualität, sind die Polaren der Mittelpunkte der Umkreise die Mittellinien des Dreieck, d.h. die Seiten des vollständigen Vierseits durch die sechs Seitenmitten. (Das Diagonaldreieck dieses Vierseits ist das Ausgangsdreieck.) Im Euklidischen ist eine dieser Mittellinien die Ferngerade und Polare des Mittelpunktes des regulären Umkreises. Die anderen drei Mittellinien sind reguläre Geraden und die dualen Mittelpunkte der singulären Umkreise: die Mittellinien der Paare paralleler Geraden.

absoluter Kegelschnitt	(Ω, Ω^Δ)	(Ω^Δ, Ω)
3 Eckpunkte	A_1, A_2, A_3	a_1, a_2, a_3
3 Seiten	a_1, a_2, a_3	A_1, A_2, A_3
3 Paare von Seitenmitten	$M_{1\pm}, M_{2\pm}, M_{3\pm}$	$w_{1\pm}, w_{2\pm}, w_{3\pm}$
3 Paare von Winkelhalbierenden	$w_{1\pm}, w_{2\pm}, w_{3\pm}$	$M_{1\pm}, M_{2\pm}, M_{3\pm}$
3 Paare von Mittelsenkrechten	$m_{1\pm}, m_{2\pm}, m_{3\pm}$	$W_{1\pm}, W_{2\pm}, W_{3\pm}$
3 Paare von Ortho-Polen(?)	$W_{1\pm}, W_{2\pm}, W_{3\pm}$	$m_{1\pm}, m_{2\pm}, m_{3\pm}$
4 Umkreismitten	$m_{1\pm} \times m_{2\pm} \in m_{3\pm}$	$W_{1\pm} \times W_{2\pm} \ni W_{3\pm}$
4 Mittellinien/Polaren der Umkreismitten	$M_{1\pm} \times M_{2\pm} \ni M_{3\pm}$	$w_{1\pm} \times w_{2\pm} \in w_{3\pm}$
4 In-/Ankreismitten	$w_{1\pm} \times w_{2\pm} \in w_{3\pm}$	$M_{1\pm} \times M_{2\pm} \ni M_{3\pm}$
4 Polaren der In-/Ankreismitten	$W_{1\pm} \times W_{2\pm} \ni W_{3\pm}$	$m_{1\pm} \times m_{2\pm} \in m_{3\pm}$

$$\begin{aligned}
 a_\ell &\sim A_{\ell+1} \times A_{\ell+2}, \\
 M_{\ell\pm} &\sim \sqrt{\Omega[A_{\ell+2}]A_{\ell+1}} \pm \sqrt{\Omega[A_{\ell+1}]A_{\ell+2}}, \\
 w_{\ell\pm} &\sim \sqrt{\Omega^\Delta[a_{\ell+2}]a_{\ell+1}} \pm \sqrt{\Omega^\Delta[a_{\ell+1}]a_{\ell+2}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{\ell\pm} &\sim \Omega^\Delta a_\ell \times M_{\ell\pm}, \\ W_{\ell\pm} &\sim \Omega A_\ell \times w_{\ell\pm} \sim \Omega(A_\ell \times \Omega^\Delta w_{\ell\pm}). \end{aligned}$$

Ist der absolute Kegelschnitt regulär, finden wir zu einem Dreieck in allgemeiner Lage vier reguläre **Umkreise** und vier reguläre **In-/Ankreise**. Diese sind reell, sofern die Ecken bzw. die Seiten vergleichbar sind, d.h. die drei Ecken sämtlich innere oder sämtlich äußere Punkte bzw. die drei Seiten sämtlich innere oder sämtlich äußere Linien sind.

Übung 6.11 *In der euklidischen Ebene hat ein Dreieck in allgemeiner Lage vier reguläre **In- und Ankreise**, die als Kegelschnitte zu drei gegebenen Tangenten (den Dreiecksseiten) und zwei Punkten (den absoluten Polen der Geometrie) entstehen. Der reguläre **Umkreis** ist der eindeutige Kegelschnitt durch 5 Punkte (die Ecken des Dreiecks und die absoluten Pole) Die 3 singulären Umkreise werden jeweils durch eine Seite und ihre Parallele durch die gegenüberliegende Ecke gebildet.*

Übung 6.12 *In der dual-euklidischen Ebene hat ein Dreieck in allgemeiner Lage vier reguläre **Umkreise**, die als Kegelschnitte zu drei gegebenen Punkten (den Ecken des Dreiecks) und zwei Tangenten (den konjugiert komplexen Geraden, in die der absolute Kegelschnitt zerfällt) entstehen. Der reguläre **Inkreis** ist der eindeutige Kegelschnitt zu 5 Tangenten (den Dreiecksseiten und den Geraden des absoluten Kegelschnitts). Die 3 singulären Ankreise sind die Doppelgeraden durch den absoluten Pol der Geometrie mit absoluten Polen in einer Ecke und im Schnitt mit der gegenüberliegenden Seite des Dreiecks.*

Übung 6.13 ***In-, An- und Umkreise** in den Minkowski- und Dual-Minkowski-Ebenen entsprechen denen der euklidischen und dual-euklidischen Ebenen. Die In-/Ankreise der Minkowski-Ebene bzw. die Umkreise der Dual-Minkowski-Ebene sind genau dann reell, wenn die Dreiecksseiten bzw. die Dreiecksecken vergleichbar sind, d.h. nicht durch den absoluten Kegelschnitt getrennt werden.*

Übung 6.14 *In der Galilei-Ebene hat ein Dreieck in allgemeiner Lage einen regulären **Umkreis** als eindeutigen(!) Kegelschnitt durch 4 Punkte (die Ecken des Dreiecks und den absoluten Pol der Geometrie) und mit einer Tangente in einem der vorgegebenen Punkte (der absoluten Polaren der Geometrie). Genauso gibt es einen regulären **Inkreis** als eindeutigen Kegelschnitt zu 4 Tangenten (Dreiecksseiten und absoluter Polaren) und einem Berührungspunkt (dem absoluten Pol). Die 3 singulären Umkreise entsprechen denen der euklidischen und Minkowski-Geometrien. Die 3 singulären Ankreise entsprechen denen der dual-euklidischen und Dual-Minkowski-Geometrien.*

6.4 Peripheriewinkel

Die Kurve der Punkte P , die eine feste Strecke AB unter einem festen Winkel „sehen“, ist gegeben durch

$$\text{ang}_{(\Omega, \Omega^\Delta)}(A \times P, B \times P) = \text{ang}_{(\Omega, \Omega^\Delta)}(A \times C, B \times C). \quad (6.7)$$

Hierbei ist C ein ebenfalls vorgegebener Punkt, der den Winkel festlegt. Verwenden wir stattdessen die Invarianten (5.11), so erhalten wir

$$[ABP]^2 \Omega[P] \Omega^\Delta[A \times C] \Omega^\Delta[B \times C] = [ABC]^2 \Omega[C] \Omega^\Delta[A \times P] \Omega^\Delta[B \times P]. \quad (6.8)$$

Dies ist eine Kurve vierter Ordnung. Das sollte nicht überraschen, denn auch in der euklidischen Ebene ist die Kurve fester Peripheriewinkel (unter Identifikation von Nebenwinkeln) die Vereinigung des Kreises durch ABC und seines Spiegelbildes an AB .

Theorem 6.15 (Thales-Kegelschnitt) *Liege weder A noch B im Kern von Ω . Dann bilden die Fußpunkte der Lote aus B auf ein Geradenbüschel durch A (in jeder unserer Geometrien) einen Kegelschnitt, der in den singulären Geometrien ein Kreis ist.*

Beweis. Orthogonalität ist durch die Polarität zu Ω gegeben. Die Fußpunkte P der Lote bilden daher die Menge

$$\left\{ P \mid (A \times P)^T \Omega^\Delta(B \times P) = 0 \right\} = \left\{ P \mid \det[\Omega A, \Omega P, B \times P] = 0 \right\}.$$

Dies ist der Kegelschnitt

$$\mathcal{X}_A^T \Omega^\Delta \mathcal{X}_B \sim (A^T \Omega B) \Omega - \Omega A B^T \Omega.$$

Er geht durch A und B und schneidet Ω in den vier Berührungspunkten der Tangenten durch A und B an den absoluten Kegelschnitt. (In der Tat sehen alle anderen Punkte von Ω die Strecke AB unter dem Winkel Null, vergleiche Proposition 5.11.) Der Kegelschnitt ist genau dann ein Kreis, wenn die vier Schnittpunkte mit Ω in zwei Berührungspunkten zusammenfallen, d.h. wenn P und Q auf Ω liegen, oder Ω singulär ist. \boxtimes

In den regulären Geometrien ist AB die einzige Sehne des Thales-Kegelschnitts, für die die Aussage des Satzes gilt. Je 4 Punkten auf dem absoluten Kegelschnitt definieren 3 Thales-Kegelschnitte zu den Diagonalknotenpaaren des Tangentenvierseits.

Proposition 6.16 *Sei der absolute Kegelschnitt Ω keine Doppelgerade d.h. alles außer euklidischer, Galilei- oder Minkowski-Geometrie. Besitzt ein Kegelschnitt \mathcal{C} eine Sehne AB (weder A noch B im Kern von Ω), die entlang \mathcal{C} unter einem festen, nicht verschwindenden Peripheriewinkel erscheint, so ist \mathcal{C} der Thales-Kegelschnitt zur Sehne AB .*

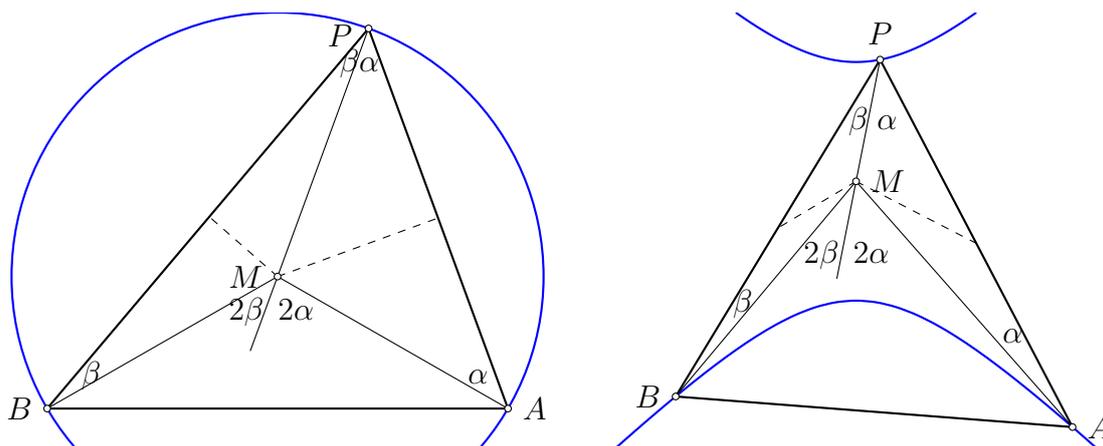
Beweis. Wie in der Argumentation zuvor kann \mathcal{C} den absoluten Kegelschnitt nur in Berührungspunkten der Tangenten durch A, B schneiden, diese definieren aber den Thales-Kegelschnitt. Dies gilt auch, wenn der (singuläre) absolute Kegelschnitt in zwei verschiedene Geraden zerfällt: \mathcal{C} darf diese nur im absoluten Pol schneiden, ist also selbst ein Geradenpaar, das sich im absoluten Pol schneidet, d.h. ein Thales-Kreis. \boxtimes

Theorem 6.17 (Peripheriewinkel) *Sei der absolute Kegelschnitt eine Doppelgerade, d.h. euklidische, Galilei- oder Minkowski-Geometrie. Dann erscheint jede Sehne jeden regulären Kreises (d.h. kein Geradenpaar) entlang des Kreises unter einem konstanten Winkel (wenn Nebenwinkel identifiziert werden).*

Beweis. Der Satz wird in der Minkowski-Ebene genauso wie in der euklidischen Ebene bewiesen und benötigt den (nachfolgenden) Außenwinkelsatz.

Die Lote aus dem Mittelpunkt M auf die Sehnen ist deren Mittelsenkrechten, die Spiegelung an den Loten zeigt die Gleichheit der Winkel $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$. Aufgrund des Außenwinkelsatzes ist der Mittelpunktswinkel also der doppelte Peripheriewinkel. Letzterer hängt daher nur von der Sehne aber nicht vom Peripheriepunkt ab.

In der Galilei-Ebene schlägt die Argumentation fehl, da der Winkel im Mittelpunkt (dem absoluten Pol) unbestimmt ist. Wir können aber die Galilei-Ebene (und ihr parabolisches Winkelmaß) als Grenzwert der euklidischen und Minkowski-Ebenen mit der in Abschnitt 5.4.3 besprochenen Skalierung auffassen. \boxtimes



Übung 6.18 *Betrachte die Galilei-Ebene in der Standard-Einbettung aus Abschnitt 5.3, d.h. $(\Omega, \Omega^\Delta) = (\text{diag}(0, 0, 1), \text{diag}(1, 0, 0))$ mit den Abstands- und Winkelmaßen*

$$\text{dist} \left((x_1, y_1, 1)^T, (x_2, y_2, 1)^T \right) = |y_1 - y_2|, \quad \text{ang} \left((1, y_1, z_1)^T, (1, y_2, z_2)^T \right) = |y_2 - y_1|,$$

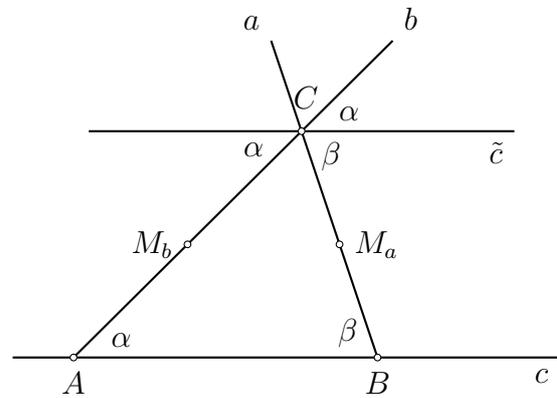
für endliche Punkte und nicht durch den absoluten Pol verlaufende Geraden. Ein regulärer Kreis ist aufgrund der Ähnlichkeitsabbildungen der Galilei-Ebene o.B.d.A. die Kurve $\{(y^2, y, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Zeige, dass der Peripheriewinkel über einer Sehne AB konstant ist, genauer

$$\text{ang}(A \times P, B \times P) \equiv |y_A - y_B|,$$

für $A = (y_A^2, y_A, 1)^T$, $B = (y_B^2, y_B, 1)^T$ und $P = (y_P^2, y_P, 1)^T$.

Lemma 6.19 (Außenwinkelsatz) Sei der absolute Kegelschnitt eine Doppelgerade, d.h. euklidische, Galilei- oder Minkowski-Geometrie. Dann ist in jedem Dreieck (deren Ecken nicht in einem absoluten Pol liegen) jeder Außenwinkel die Zusammensetzung (Summe) der gegenüberliegenden Innenwinkel.

Beweis. Die Spiegelungen an den Mittelpunkten M_a, M_b der Schenkel bilden beide die Grundlinie c auf die (parallele) Gerade $\tilde{c} = C \times (c \cap \Omega)$ ab. Gleichzeitig werden entsprechende Wechselwinkel aufeinander abgebildet, sind also gleich. Die Bilder der beiden Innenwinkel α, β setzen sich gerade zum Außenwinkel zusammen, wenn α nochmal an C gespiegelt wird. \bowtie



Übung 6.20 Zeige den Außenwinkelsatz noch für den Fall, dass eine Ecke auf der Ferngerade (aber nicht in einem Pol) liegt.

Übung 6.21 In den elliptischen und Beltrami/Klein-Geometrien schlägt der Beweis fehl, da die Spiegelbilder von c verschieden sind. Elliptisch sind Pol und Polare gleichläufig: bewegt man den Pol entlang einer Geraden g , so bewegt sich der Schnitt der Polaren mit g in die gleiche Richtung. Hyperbolisch sind Pol und Polare gegenläufig, Insbesondere treffen sie sich in den (reellen) Punkten des absoluten Kegelschnitts. Folgere daraus, dass der Außenwinkel in der elliptischen Geometrie kleiner und in der Beltrami/Klein-Geometrie größer als die Zusammensetzung der gegenüberliegenden Innenwinkel ist.

Der Außenwinkelsatz ist Ausdruck fehlender Krümmung. Ist der Außenwinkel kleiner als die Zusammensetzung der gegenüberliegenden Innenwinkel, so ist der Raum positiv gekrümmt. Ist er größer, so ist der Raum negativ gekrümmt. Dies ist auch eng verwandt mit dem Parallelenaxiom. In positiv gekrümmten Räumen gibt es keine Parallelen, d.h.

alle Geraden durch einen festen Punkt schneiden eine feste Gerade in endlicher Entfernung. In ungekrümmten Räumen, gibt es zu jedem Punkt (außerhalb der Geraden) genau eine Gerade die erst im Unendlichen (auf dem absoluten Kegelschnitt) schneidet. In negativ gekrümmten Räumen, gibt es zwei verschiedene Geraden, die auf dem absoluten Kegelschnitt schneiden, und viele Geraden, die erst jenseits schneiden.

Dual zur Winkelbilanz ist die Abstandsbilanz in Dreiecken. In der euklidischen Geometrie sind Umwege länger, in der Minkowski-Geometrie kürzer (Zeitdilatation). In der Galilei-Geometrie sind sie gleich (klassische Addition von Geschwindigkeiten und absolute Gleichzeitigkeit). Wir finden eine weitere Charakterisierung der neun Geometrien:

Die Abstände von Punkten sind	Im Vergleich mit der Zusammensetzung der gegenüberliegenden Innenwinkel ist der Außenwinkel		
	kleiner, keine Parallelen, pos. gekrümmt	gleichgroß, eine Parallele, flach	größer, viele Parallelen, neg. gekrümmt
entlang Umwegen länger, nicht Null	Elliptisch	Euklidisch	Beltrami/Klein
entlang Umwegen gleich, in einer Richtung Null	Dual-euklidisch	Galilei	Dual-Minkowski
entlang Umwegen kürzer, in zwei Richtungen Null	Anti-deSitter	Minkowski	DeSitter

Bei elliptischer Winkelmessung, d.h. in der ersten Zeile der Tabelle, können wir die Innenwinkel auch summieren: Die Ebene ist positiv/nicht/negativ gekrümmt, falls die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks größer als/gleich/kleiner als π ist. Bei parabolischer oder hyperbolischer Winkelmessung, d.h. in den anderen beiden Zeilen, würde diese Formulierung aber keinen Sinn machen.

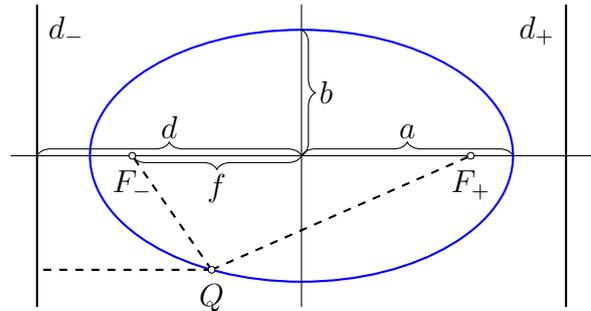
7 Brennpunkte

7.1 Die euklidische Ellipse

Die Ellipse der euklidischen Ebene (in achsenparalleler Lage, mit Halbachsen a und $b = \sqrt{a^2 - f^2} < a$) ist der Kegelschnitt

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2}$$

aus den Punkten Q fester Abstandssumme $2a$ zu den Brennpunkten $F_{\pm} = (\pm f, 0)^T$:



$$2a = \text{dist}(Q, F_-) + \text{dist}(Q, F_+) = \sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} \quad (7.1)$$

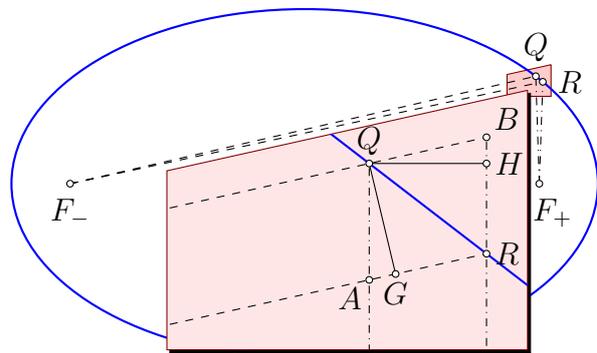
Es ist auch der Kegelschnitt mit festem Abstandsverhältnis $e = f/a = \sqrt{1 - b^2/a^2} < 1$ zu einem Brennpunkt F_{\pm} und seiner Direktrix (Leitlinie) $d_{\pm} = \{y = \pm d\}$, $d = \pm a^2/f$:

$$f/a = e = \frac{\text{dist}(Q, F_{\pm})}{\text{dist}(Q, d_{\pm})} = \frac{\sqrt{(x \mp f)^2 + y^2}}{|x - a^2/f|}$$

Entsprechend hat eine Hyperbel eine konstante Abstandsdifferenz und eine Exzentrizität $e > 1$. Im Grenzfall der Parabel, $e = 1$, hat jeder Punkt die gleichen Abstände zu Brennpunkt und Direktrix.

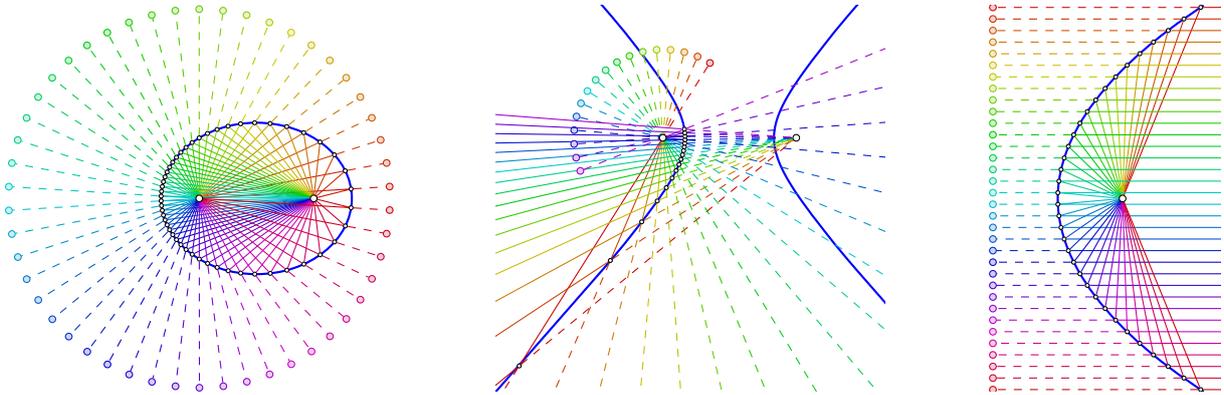
Übung 7.1 Die Direktrix ist die Polare des Brennpunkt an die Ellipse/Hyperbel/Parabel.

Seien Q, R infinitesimal benachbart, d.h. QR ist ein Stück der Tangente. Die Strahlen aus F_{\pm} treffen sich in A, B . Fällt man von Q die Lote, dann gilt wegen der Gärtnerregel $GR = HR$, also QRG, QRH kongruent, insbesondere $QG = QH$. Somit ist $QARB$ ein Rhombus, AB eine Symmetrieachse, und die Winkel bei Q und R sind gleich: Einfall- gleich Ausfallswinkel.

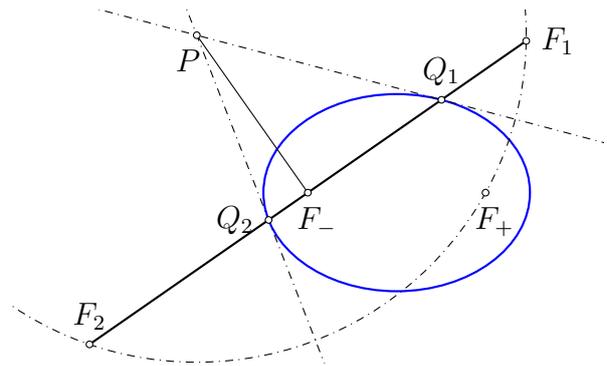


Übung 7.2 Zeige durch Ableitung der Gärtner-Regel (7.1), dass in der Tangente in Q an die Ellipse die Sehnen durch die Brennpunkte ineinander gespiegelt werden.

Die Spiegelbilder eines Brennpunktes an der Ellipse formen also einen Kreis mit Radius $2a$ um den anderen Brennpunkt. Entsprechendes gilt für die Hyperbel. Im Grenzfall der Parabel werden achsenparallele Strahlen in den Brennpunkt gespiegelt, und die Spiegelbilder des Brennpunktes liegen auf der Direktrix.



Schneidet eine Sehne durch den Brennpunkt F_- die Ellipse in Q_1, Q_2 , so schneiden sich die Tangenten im Pol P der Sehne. Die Spiegelbilder F_1, F_2 des anderen Brennpunktes in den Tangenten liegen auf der Sehne. Diese beiden Punkte liegen gleich weit vom Pol P und gleich weit vom Brennpunkt F_- . Deshalb liegt P auf dem in F_- auf die Sehne errichteten Lot.



Theorem 7.3 *Zusammengefasst gilt für Ellipsen, Hyperbeln (und Parabeln mit dem zweiten Brennpunkt auf der Ferngeraden):*

- (i) *Die Summe (Ellipsen) bzw. Differenz (Hyperbeln) der Abstände zu den Brennpunkten ist konstant.*
- (ii) *Das Verhältnis der Abstände zu Brennpunkt und Direktrix (der Polaren des Brennpunktes bezüglich des Kegelschnitts) ist konstant. (Dabei wird der Abstand zur Direktrix entlang des Lotes auf die Direktrix gemessen.)*
- (iii) *Jeder Strahl aus einem Brennpunkt wird in der Tangente im getroffenen Punkt des Kegelschnitts in eine Gerade durch den anderen Brennpunkt gespiegelt.*
- (iv) *Der Pol einer Sehne durch einen Brennpunkt liegt auf dem im Brennpunkt errichteten Lot.*
- (v) *Die Spiegelbilder eines Brennpunktes im Tangentenbündel des Kegelschnitts bilden einen Kreis um den anderen Brennpunkt.*

7.2 Brennpunkte, Brennlilien und das Diagonal-Dreieck

Die Metrik wird durch den absoluten Kegelschnitt definiert. Wir wollen daher Brennpunkte durch ein Paar von Kegelschnitten $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta), (\Omega, \Omega^\Delta)$ definieren, so dass Theorem 7.3 gültig bleibt. Die Orthogonalitätsaussage (iv) bedeutet, dass die Pole (bezüglich beider Kegelschnitte) jeder Sehne durch einen Brennpunkt kollinear zu diesem Brennpunkt liegen. Dies muss dann auch für die Tangenten durch den Brennpunkt an einen der Kegelschnitte gelten: die entsprechende Sehne wird zu einer **gemeinsamen** Tangente.

Definition 7.4 Die Brennpunkte zweier Kegelschnitte sind die drei Punktpaare (d.h. die dualen Geradenpaare), in die die singulären Elemente des Büschels $\{\lambda\mathcal{C}^\Delta + \mu\Omega^\Delta\}$ (der dualen Matrizen) zerfallen. Dual dazu sind die Brennlilien zweier Kegelschnitte die drei Geradenpaare, in die die singulären Elemente des Büschels $\{\lambda\mathcal{C} + \mu\Omega\}$ zerfallen.

Brennpunkte und Brennlilien sind wohldefiniert, sofern das jeweilige Büschel regulär ist. Für Kegelschnitte in allgemeiner Lage bilden die gemeinsamen Tangenten ein vollständiges Vierseit, deren Eckpunktpaare die Brennpunktpaare sind. Genauso bilden die gemeinsamen Schnittpunkte ein vollständiges Viereck, deren Seitenpaare die Brennlilienpaare sind.

In nichttrivialen Büscheln können wir die dualen Matrizen der Elemente mit Rang 1 durch stetige Fortsetzung der dualen Matrizen entlang des Büschels gewinnen. Wir bezeichnen dann auch die (stetigen) Familien

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{C}, \mathcal{D} \rangle &:= \{ (\mathcal{G}, \mathcal{G}^\Delta) \mid \mathcal{G} = \lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}P^1 \}, \\ \langle \mathcal{C}^\Delta, \mathcal{D}^\Delta \rangle^\Delta &:= \{ (\mathcal{G}, \mathcal{G}^\Delta) \mid \mathcal{G}^\Delta = \lambda\mathcal{C}^\Delta + \mu\mathcal{D}^\Delta, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}P^1 \} \end{aligned} \quad (7.2)$$

als Büschel und duales Büschel von $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ und $(\mathcal{D}, \mathcal{D}^\Delta)$. Man beachte, dass für D mit Rang 1 (und „falscher“ dualer Matrix D^Δ) eventuell $(\mathcal{D}, \mathcal{D}^\Delta) \notin \langle \mathcal{C}, \mathcal{D} \rangle$. In allgemeiner Lage bilden die Brennlilienpaare die singulären Elemente von $\langle \mathcal{C}, \mathcal{D} \rangle$, während die Brennpunktpaare die absoluten Pole der singulären Elemente von $\langle \mathcal{C}^\Delta, \mathcal{D}^\Delta \rangle^\Delta$ darstellen.

Lemma 7.5 Die Eckpunkte jeden selbstpolaren Dreiecks eines regulären Büschels $\{\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}\}$ sind Eigenvektoren jeder Matrix $\tilde{\mathcal{D}}^{-1}\tilde{\mathcal{C}}$ zu beliebigen verschiedenen regulären Elementen des Büschels.

Beweis. Sind \mathcal{C} und \mathcal{D} beliebige reguläre Vertreter und P_1, P_2, P_3 bezüglich beider selbstpolar, dann ist notwendig $\mathcal{C}P_k \sim P_\ell \times P_m \sim \mathcal{D}P_k$, also $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}P_\ell \sim P_\ell$, für alle ℓ . Somit sind die Eckpunkte P_ℓ Eigenvektoren von $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}$. Diese stimmen mit den Eigenvektoren von $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{D}$ und von $\mathcal{D}^{-1}(\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D})$ überein. Also stimmen sie auch mit den Eigenvektoren jeder Matrix $\tilde{\mathcal{D}}^{-1}\tilde{\mathcal{C}}$ zu verschiedenen regulären Elementen des Büschels überein. \boxtimes

Theorem 7.6 *Sind \mathcal{C} und \mathcal{D} reguläre Kegelschnitte in allgemeiner Lage, dann stimmen das [Diagonaldreieck](#) des Schnittpunktvierecks und das [Diagonaldreieck](#) des Tangentenvierecks überein. Seine Ecken sind die Eigenvektoren von $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}$, seine Seiten die Eigenvektoren von $\mathcal{D}\mathcal{C}^{-1}$. Dieses Dreieck ist außerdem das eindeutige zu beiden Kegelschnitten selbstpolare Dreieck.*

Beweis. Allgemeine Lage bedeutet hier, dass die Kegelschnitte 4 paarweise verschiedene Schnittpunkte S_1, \dots, S_4 und vier paarweise verschiedene gemeinsame Tangenten t_1, \dots, t_4 besitzen. Aufgrund von Proposition 5.22 sind sowohl das [Diagonaldreieck](#) des Schnittpunktvierecks als auch das [Diagonaldreieck](#) des Tangentenvierecks selbstpolar zu beiden Kegelschnitten. Dank der allgemeinen Lage sind beide Dreiecke regulär und wegen Lemma 7.5 identisch mit Ecken und Seiten in den Eigenvektoren von $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{D}\mathcal{C}^{-1}$. Die Eindeutigkeit des zu beiden Kegelschnitten selbstpolaren Dreiecks folgt ebenfalls aus Lemma 7.5.

Alternativ kann die Gleichheit von [Diagonaldreieck](#) und [Diagonaldreieck](#) auch ohne Lemma 7.5 gesehen werden: Die durch Ecke und gegenüberliegende Seite des [Diagonaldreiecks](#) definierte Spiegelung lässt beide Kegelschnitte invariant, also werden die gemeinsamen Tangenten paarweise vertauscht. (Aufgrund der allgemeinen Lage kann keine invariant sein.) Jede der drei Diagonallinien des Tangentenvierecks ist dann aber invariant, geht also durch das Spiegelzentrum oder ist die Spiegelgerade. Daher sind die Diagonallinien die Seiten des [Diagonaldreiecks](#). ✕

Das [Diagonaldreieck](#) ist also selbstdual und selbstpolar. Sind \mathcal{C}, \mathcal{D} regulär und in allgemeiner Lage, so stimmt ihr [Diagonaldreieck](#) mit den [Diagonaldreiecken](#) beliebiger (regulärer) Paare des Büschels $\langle \mathcal{C}, \mathcal{D} \rangle$ und des dualen Büschels $\langle \mathcal{C}^\Delta, \mathcal{D}^\Delta \rangle^\Delta$ überein. Wir können nun Paare (bzw. [Büschel](#) und [duale Büschel](#)) von Kegelschnitten anhand ihrer [Diagonaldreiecke](#) klassifizieren:

Allgemeine Lage: $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}$ hat drei verschiedene Eigenvektoren. Das eindeutige [Diagonaldreieck](#) ist regulär. Das [Büschel](#) hat vier verschiedene gemeinsame Punkte und drei verschiedene singuläre Elemente mit Rang 2. Das [duale Büschel](#) hat vier verschiedene gemeinsame Tangenten. Es gibt also drei Paare paarweise verschiedener Brennpunkte und drei Paare paarweise verschiedener Brennpunkte.

Parabeln: $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}$ hat einen algebraisch doppelten aber geometrisch einfachen Eigenwert. Das eindeutige [Diagonaldreieck](#) ist singulär. Es hat eine doppelte Ecke im Eigenvektor zum doppelten Eigenwert. Die Seite durch diese doppelte Ecke ist die (eindeutige) Polare der dritten Ecke im einfachen Eigenvektor. Das [Büschel](#) hat einen doppelten

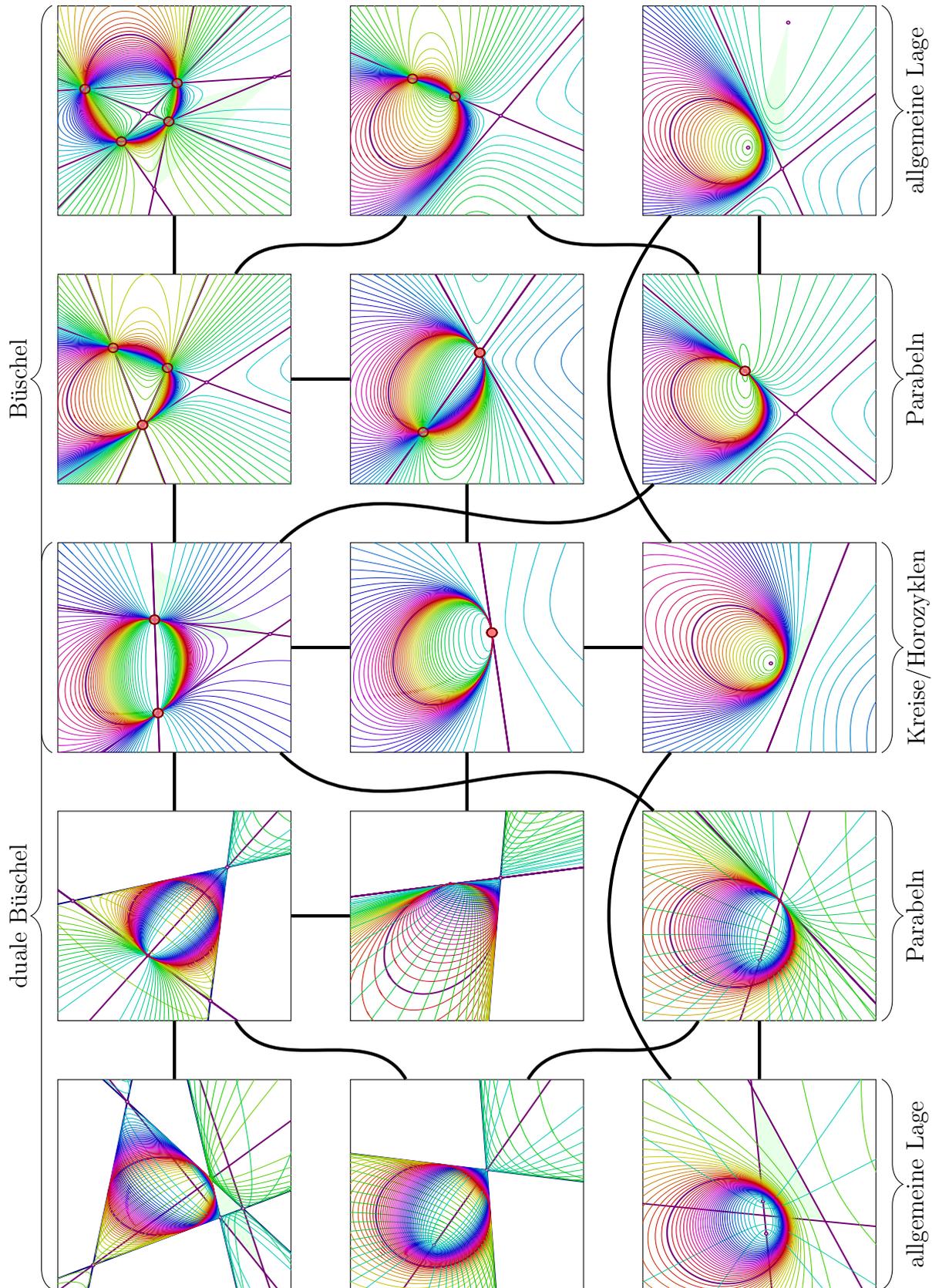
und zwei einfache gemeinsame Punkte, wobei der doppelte Punkt ein Berührungspunkt ist. Das Bündel hat ein doppeltes und ein einfaches singuläres Element, beide mit Rang 2. Das duale Bündel hat eine doppelte und zwei einfache gemeinsame Tangenten. Es gibt also zwei identische Paare verschiedener Brennlinien/Brennpunkte und ein Paar identischer Brennlinien/Brennpunkte.

Kubische Parabeln: $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}$ hat einen algebraisch dreifachen aber geometrisch einfachen Eigenwert. Das eindeutige Diagonaldreieck ist singulär. Es hat eine dreifache Ecke im Eigenvektor und eine dreifache Seite ist deren Polare. Das Bündel hat einen dreifachen und einen einfachen gemeinsamen Punkt, wobei der dreifache Punkt ein Berührungspunkt kubischen Kontakts ist. Das Bündel hat ein dreifaches singuläres Element mit Rang 2. Das duale Bündel hat eine dreifache und eine einfache gemeinsame Tangente. Es gibt also drei identische Paare verschiedener Brennlinien/Brennpunkte.

Kreise: $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}$ hat einen algebraisch und geometrisch doppelten Eigenwert. Es gibt ein Kontinuum (projektive Gerade) von Diagonaldreiecken, die bis auf zwei Ausnahmen regulär sind. Ein Eckpunkt ist der Eigenvektor zum einfachen Eigenwert. Die anderen beiden Ecken liegen im Eigenraum zum doppelten Eigenwert, harmonisch zu den beiden Berührungspunkten des Bündels. Das Bündel hat zwei doppelte gemeinsame Punkte, beides Berührungspunkte. Es hat ein einfaches singuläres Element mit Rang 2 und ein doppeltes singuläres Element mit Rang 1, vergleiche Definition 6.1. Es ist identisch mit dem dualen Bündel. Es gibt also ein Paar verschiedener Brennlinien/Brennpunkte und zwei identische Paare identischer Brennlinien/Brennpunkte.

Horozyklen: $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}$ hat einen algebraisch dreifachen aber geometrisch doppelten Eigenwert. Es gibt ein Kontinuum (projektive Gerade) von singulären Diagonaldreiecken. Zwei zusammenfallende Ecken liegen im Pol des Eigenraumes. Die Seite durch diese doppelte Ecke ist die (eindeutige) Polare der dritten Ecke, die ein beliebiger Eigenvektor ist. Das Bündel hat einen vierfachen gemeinsamen Punkt und ein dreifaches singuläres Element mit Rang 1. Es ist identisch mit dem dualen Bündel. Es gibt also drei identische Paare identischer Brennlinien/Brennpunkte.

Beachte, dass diese Klassifikation zunächst für Paare regulärer Kegelschnitte und reguläre Bündel gilt. Enthält das Paar einen singulären Kegelschnitt, kann zu regulären Vertretern des Bündels gewechselt werden. Alternativ kann die duale Matrix D^Δ anstelle der Inversen benutzt werden, diese muss dann aber die stetige Fortsetzung der dualen Matrizen des Bündels sein. In der Definition 6.1 von Kreisen wurde diese Einschränkung direkt als Bedingung an das duale Bündel formuliert.



7.3 Bündel konfokaler Kegelschnitte

Wir wollen nun Theorem 7.3 im allgemeinen Kontext zeigen.

Proposition 7.7 *Ist g eine beliebige Sehne durch einen Brennpunkt F eines regulären dualen Bündels $\langle \mathcal{C}^\Delta, \mathcal{D}^\Delta \rangle^\Delta$ von Kegelschnitten, so sind alle Pole $(\lambda\mathcal{C}^\Delta + \mu\mathcal{D}^\Delta)g$ von g bezüglich der Elemente des dualen Bündels kollinear. Genauer liegen sie auf einer Geraden h durch den Brennpunkt F , so dass g, h harmonisch zu den beiden gemeinsamen Tangenten des Bündels durch F liegen.*

Duale Formulierung: Ist P ein beliebiger Punkt auf einer Brennpunktlinie f eines regulären Bündels $\langle \mathcal{C}, \mathcal{D} \rangle$ von Kegelschnitten, so sind alle Polaren $(\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D})P$ von P bezüglich der Elemente des Bündels konkurrent. Genauer gehen sie durch einen Punkt Q auf der Brennpunktlinie f , so dass P, Q harmonisch zu den beiden gemeinsamen Punkten des Bündels auf f liegen.

Beweis. Wir betrachten den Satz in seiner dualen Formulierung für ein Bündel in allgemeiner Lage. Theorem 4.14 liefert die harmonische Lage und somit dem gemeinsamen Schnittpunkt. Ist das reguläre Bündel nicht in allgemeiner Lage folgt die Behauptung durch einen regulären Grenzübergang. \boxtimes

Proposition 7.8 *Sei g eine beliebige (nicht tangentielle) Sehne durch einen Brennpunkt F eines regulären dualen Bündels $\langle \mathcal{C}^\Delta, \mathcal{D}^\Delta \rangle^\Delta$ von Kegelschnitten. Sei $Q = g \cap \mathcal{E}$ der Schnittpunkt von g mit einem beliebigen regulären Kegelschnitt \mathcal{E} des Bündels, und $t = \mathcal{E}Q$ die Tangente an \mathcal{E} in Q . Sei nun (T, t) ein Pol-Polare-Paar zu einem beliebigen anderen Kegelschnitt (Ω, Ω^Δ) des Bündels. Dann bildet die durch (T, t) definierte projektive Involution (d.h. die Spiegelung an t bzgl. (Ω, Ω^Δ)) die Sehne g auf eine Gerade \tilde{g} durch den gegenüberliegenden Brennpunkt \tilde{F} ab.*

Duale Formulierung: Sei Q ein beliebiger (nicht gemeinsamer) Punkt auf einer Brennpunktlinie f eines regulären Bündels $\langle \mathcal{C}, \mathcal{D} \rangle$ von Kegelschnitten, Sei g die Tangente von Q an einen beliebigen regulären Kegelschnitt \mathcal{E} des Bündels, und $T = \mathcal{E}g$ der Berührungspunkt dieser Tangente mit \mathcal{E} . Sei nun (T, t) ein Pol-Polare-Paar zu einem beliebigen anderen Kegelschnitt (Ω, Ω^Δ) des Bündels. Dann bildet die durch (T, t) definierte projektive Involution (d.h. die Spiegelung an T bzgl. (Ω, Ω^Δ)) den Punkt Q auf in einen Punkt \tilde{Q} auf der gegenüberliegenden Brennpunktlinie \tilde{f} ab.

Beweis. Wir betrachten den Satz wieder in seiner dualen Formulierung für ein Bündel in allgemeiner Lage. Aufgrund von Theorem 4.20 induziert das Bündel eine projektive

Involution auf der Tangente g . Diese stimmt mit der durch (T, t) induzierten überein, da beide Involutionen den Berührungspunkt T von \mathcal{E} invariant lassen und die Schnittpunkte $g \cap \Omega$ vertauschen. Also werden von beiden Involutionen auch die Schnittpunkte $\{Q, \tilde{Q}\} = g \cap \mathcal{S}$ mit dem durch die Brennlilien f, \tilde{f} gebildeten singulären Kegelschnitt \mathcal{S} vertauscht. \bowtie

Proposition 7.9 *Seien $(\mathcal{E}, \mathcal{E}^\Delta)$ und (Ω, Ω^Δ) verschiedene Elemente eines dualen Büschels und (F, \tilde{F}) ein Brennpunktpaar. Definiere (Ω, Ω^Δ) die Spiegelungen und Kreise. Dann liegen die im Tangentenbündel von \mathcal{E} gespiegelten Bilder von \tilde{F} auf einem gemeinsamen Kreis um F . (D.h. alle Spiegelbilder von \tilde{F} haben von F denselben Abstand.)*

Duale Formulierung: Seien $(\mathcal{E}, \mathcal{E}^\Delta)$ und (Ω, Ω^Δ) verschiedene Elemente eines dualen Büschels und (f, \tilde{f}) ein Brennlilienpaar. Definiere (Ω, Ω^Δ) die Spiegelungen und Kreise. Dann liegen die in den Punkten von \mathcal{E} gespiegelten Bilder von \tilde{f} tangential an einen gemeinsamen Kreis mit dualem Mittelpunkt f . (D.h. alle Spiegelbilder von \tilde{f} schneiden f unter demselben Winkel.)

Beweis. Wir beweisen des Satz in seiner ersten Formulierung für reguläre Kegelschnitte \mathcal{E} und Ω . Ist \mathcal{E} singulär, so bilden alle nicht durch \tilde{F} verlaufenden Tangenten an \mathcal{E} ein Büschel durch F . Die Behauptung ist dann offensichtlich erfüllt. Ist Ω singulär, so betrachten wir Ω als regulären Grenzwert.

Seien also \mathcal{E} und Ω regulär und verschieden. Eine Spiegelung an einer Geraden t hat die Form

$$\mathcal{R}_t \sim \Omega^{-1}[t]\mathcal{I} - 2\Omega^{-1}tt^T,$$

vergleiche (3.3) mit Zentrum $\Omega^{-1}t$. Tangenten t an \mathcal{E} erfüllen dabei

$$0 = \mathcal{E}^{-1}[t].$$

Außerdem liegt die Doppelgerade durch das Brennpunktpaar ebenfalls im dualen Büschel:

$$\Omega^{-1} \sim \nu\mathcal{E}^{-1} + (F\tilde{F}^T + \tilde{F}F^T).$$

Daher gibt es $\mu \neq 0$, so dass für alle Tangenten t

$$\Omega^{-1}[t] = -2\mu(t^T F)(t^T \tilde{F}) \quad (*)$$

gilt. Die Spiegelbilder von \tilde{F} in den Tangenten t an \mathcal{E} sind also gegeben durch:

$$\mathcal{R}_t \tilde{F} \sim \mu(t^T F)\tilde{F} + \Omega^{-1}t.$$

Ein allgemeiner Kreis $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^\Delta)$ mit Mittelpunkt F hat die Form

$$\mathcal{C} \sim \lambda\Omega + \Omega F F^T \Omega,$$

vergleiche Definition 6.1. Einsetzen der Spiegelbilder von \tilde{F} liefert:

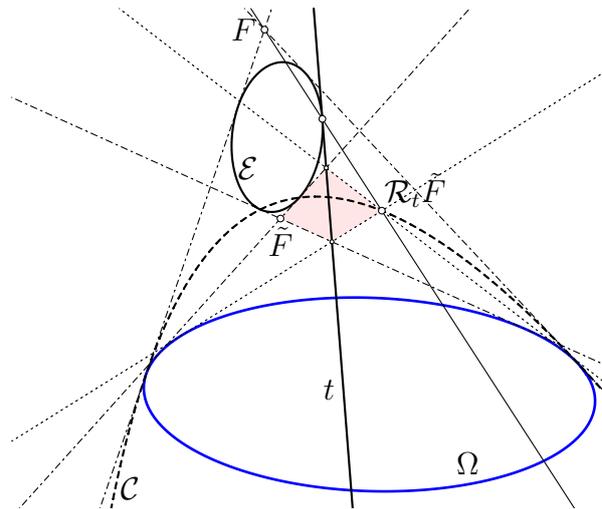
$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}[R_t\tilde{F}] &\sim \lambda\Omega[R_t\tilde{F}] + (F^T\Omega(R_t\tilde{F}))^2 \\
 &\sim \lambda\Omega[\mu(t^T F)\tilde{F} + \Omega^{-1}t] + (F^T(\mu(t^T F)\Omega\tilde{F} + t))^2 \\
 &= \lambda\mu^2(t^T F)^2\Omega[\tilde{F}] + \boxed{2\lambda\mu(t^T F)(t^T \tilde{F}) + \lambda\Omega^{-1}[t]} = 0, \text{ siehe } (*) \\
 &\quad + \mu^2(t^T F)^2(F^T\Omega\tilde{F})^2 + 2\mu(t^T F)^2(F^T\Omega\tilde{F}) + (t^T F)^2 \\
 &= (t^T F)^2 \left(\lambda\mu^2\Omega[\tilde{F}] + \mu^2(F^T\Omega\tilde{F})^2 + 2\mu(F^T\Omega\tilde{F}) + 1 \right).
 \end{aligned}$$

Die von t unabhängige Wahl

$$\lambda := -\frac{\mu^2(F^T\Omega\tilde{F})^2 + 2\mu(F^T\Omega\tilde{F}) + 1}{\mu^2\Omega[\tilde{F}]}$$

liefert nun tatsächlich den Kreis der Spiegelbilder. (Im Ausnahmefall $\Omega[\tilde{F}] = 0$ liegen mit \tilde{F} auch alle Spiegelbilder auf Ω , also ebenfalls einem Kreis.) \boxtimes

Das Brennpunktpaar F, \tilde{F} der dargestellten Kegelschnitte \mathcal{E}, Ω ist durch die vier reellen gemeinsamen Tangenten festgelegt. Das Bild $\mathcal{R}_t\tilde{F}$ von \tilde{F} unter der Spiegelung in einer Tangenten t an \mathcal{E} ist durch ein weiteres Tangentenvierseit bestimmt. Es liegt mit F und dem Berührungspunkt auf einer Linie. Die Kurve \mathcal{C} aller Bilder muss also Ω in den Berührungspunkten der Tangenten durch F ebenfalls berühren. Ist \mathcal{C} ein Kegelschnitt, muss es ein Kreis mit Mittelpunkt F sein.



Theorem 7.10 Wird in einem nichttrivialen dualen Büschel von Kegelschnitten ein Element als absoluter Kegelschnitt ausgezeichnet, so gilt für jeden anderen Kegelschnitt des dualen Büschels und jedes Brennpunktpaar: (www.stefan-liebscher.de/geometry)

- (i) Jeder Strahl aus einem Brennpunkt wird in der Tangente im getroffenen Punkt des Kegelschnitts in eine Gerade durch den anderen Brennpunkt gespiegelt.
- (ii) Der Pol einer Sehne durch einen Brennpunkt liegt auf dem im Brennpunkt errichteten Lot.
- (iii) Die Spiegelbilder eines Brennpunktes im Tangentenbündel des Kegelschnitts bilden einen Kreis um den anderen Brennpunkt.
- (iv) Die Summe bzw. Differenz der Abstände zu den Brennpunkten (sofern definiert) ist konstant.

Duale Formulierung: Wird in einem nichttrivialen Büschel von Kegelschnitten ein Element als absoluter Kegelschnitt ausgezeichnet, so gilt für jeden anderen Kegelschnitt des Büschels und jedes Brennpunktlinienpaar:

- (i) Jeder Punkt auf einer Brennpunktlinie wird in den Berührungspunkten der durch ihn verlaufenden Tangenten auf die gegenüberliegende Brennpunktlinie gespiegelt.
- (ii) Die Polaren eines Punktes einer Brennpunktlinie bezüglich der Kegelschnitte des Büschels schneiden sich auf der Brennpunktlinie.
- (iii) Die Spiegelbilder einer Brennpunktlinie in den Punkten des Kegelschnitts bilden das Tangentenbündel eines Kreises um den Pol der anderen Brennpunktlinie.
- (iv) Die Summe bzw. Differenz der Winkel der Tangenten zu den Brennpunktlinien (sofern definiert) ist konstant.

Beweis. Punkte (i)–(iii) wurden in den vorangegangenen Propositionen bewiesen. Punkt (iv) ist eine direkte Folgerung aus (i) und (iii). \boxtimes

Es verbleibt also nur noch das Abstandsverhältnis (ii) von Theorem 7.3. Da wir Abstände als Logarithmus des Doppelverhältnis definiert haben, erwarten wir hier im Allgemeinen eine transzendente Kurve, also insbesondere keinen Kegelschnitt.

In der Tat kann eine Kurve konstanten Abstandsverhältnisses zu einem gegebenen Punkt F und einer gegebenen Gerade d dieses Abstandsverhältnis nur dann auch in Richtung der Tangenten t_1, t_2 durch F an Ω beibehalten, wenn die Kurve durch die Schnittpunkte $t_\ell \cap d$ verläuft und auf einer Seite der jeweiligen Tangente liegt, also dort tangential an t_1, t_2 ist. Die einzigen Kegelschnitt-Kandidaten bilden daher das Büschel $\langle dd^T, t_1 t_2^T + t_2 t_1^T \rangle$. Dies ist ein Kreisbüschel. Allerdings enthält es nicht den absoluten Kegelschnitt, also sind die Elemente keine Kreise bezüglich Ω . Automatisch wird (F, d) zu einem Pol-Polare Paar jedes Kegelschnitts

$$\mathcal{C} = \lambda dd^T + \mu(t_1 t_2^T + t_2 t_1^T) \quad (7.3)$$

des Büschels. Ein Kegelschnitt 7.3 ist also durch den absoluten Kegelschnitt (Ω, Ω^Δ) , den Brennpunkt F , seine Polare/Direktrix d und einen beliebigen weiteren Punkt (oder eine beliebige Tangente) eindeutig bestimmt. Ist dieser Kegelschnitt regulär, so schneidet er das Lot von F auf d in zwei Punkten P, Q , die zu F und den Lotfußpunkt L harmonisch liegen. Nun sind aber

$$(L, F; P, Q) = -1, \quad \text{dist}(L, P)\text{dist}(F, Q) = \text{dist}(L, Q)\text{dist}(F, P)$$

genau dann kompatibel, wenn entweder P, Q die Mittelpunkte von F, L sind, oder Ω eine Doppelgerade ist. Tatsächlich:

Proposition 7.11 *Seien ein Punkt F , $\Omega[F] \neq 0$, und eine Gerade d , $\Omega^\Delta[d] \neq 0$, gegeben. Dann bilden die Punkte P mit festem Verhältnis der Invarianten (5.11) von P zu F und von P zum Fußpunkt L des Lotes von P auf d einen Kegelschnitt. Wird das Verhältnis variiert (und hat Ω^Δ wenigstens Rang 2), so durchlaufen die entstehenden Kegelschnitte das Büschel (7.3).*

Beweis. Sei also F ein nicht auf dem absoluten Kegelschnitt liegender Punkt und d eine nicht an den absoluten Kegelschnitt tangentielle Gerade. (Sonst wären alle Abstände zu F bzw. d unendlich!) Sei $D \sim \Omega^\Delta d$ der Pol von d . Dann ist $L \sim d \times (P \times D) = (d^T D)P - (d^T P)D$ der Lotfußpunkt. Die in festem Verhältnis stehenden Invarianten sind

$$\text{inv}(P, L) = \frac{\Omega^\Delta[P \times L]}{\Omega[P]\Omega[L]}, \quad \text{inv}(P, F) = \frac{\Omega^\Delta[P \times F]}{\Omega[P]\Omega[F]}.$$

Die Punkte $P \notin \Omega$ erfüllen also

$$0 = \Omega^\Delta[P \times F]\Omega[L] - \gamma\Omega^\Delta[P \times L] \quad (7.4)$$

für ein festes γ . Wir unterscheiden drei Fälle anhand des Rangs von Ω^Δ .

Sei zunächst Ω regulär, d.h. $\Omega^\Delta = \Omega^{-1}$ vom Rang 3. Seien $D = \Omega^{-1}d$ der Pol von d und $\{U, V\} = d \cap \Omega$ die Punkte von d auf dem absoluten Kegelschnitt. Nach Voraussetzung sind D, U, V paarweise verschieden. Wir wählen für U, V feste Vertreter, so dass $d = U \times V$, und schreiben P in baryzentrischen Koordinaten:

$$P = \lambda D + \mu U + \nu V, \quad (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{CP}^2.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L &= d \times (P \times D) = (U \times V) \times (P \times D) = [UVD]P - [UVP]D \\ &= [DUV](\mu U + \nu V), \\ P \times L &= \nu [DUV]D \times (\mu U + \nu V), \end{aligned}$$

wobei $[DUV]$ wieder die Determinante bezeichnet. Gleichung (7.4) hat die Form

$$0 = 2[DUV]^2 \mu \nu \Omega^{-1}[P \times F](U^T \Omega V) - \gamma \mu \nu^3 (D \times U)^T \Omega^{-1}(D \times V).$$

Außer für die Punkte P auf den Tangenten t_1, t_2 an Ω durch F (die wir bereits als die Schnittpunkte mit d identifiziert haben) kann $\mu \nu$ gekürzt werden. Dies resultiert in einer quadratischen Form für P . Bei genauem Hinsehen hat sie die Gestalt (7.3): beachte $\Omega^{-1}[P \times F] \sim (t_1 t_2^T + t_2 t_1^T)[P]$ und $\nu^2 \sim (dd^T)[P]$. (Alternativ kennen wir bereits die Punkte und Tangenten des Kegelschnitts auf d , also gehört er zum Büschel (7.3).)

Sei nun $\Omega = (X \times Y)(X \times Y)^T$ mit absoluten Polen $X \not\sim Y$, d.h. $\Omega^\Delta = XY^T + YX^T$ vom Rang 2. Alle Pole liegen auf Ω , also auch $D = \lambda X + \mu Y$ und $[DXY] = 0$. Dann gilt für beliebige Q

$$\Omega[Q] = [QXY]^2, \quad \Omega^\Delta[P \times Q] = 2[PQX][PQY],$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} \Omega[L] &= \Omega[(d^T D)P - (d^T P)D] = (d^T D)^2[PXY]^2, \\ \Omega^\Delta[P \times L] &= \Omega^{-1}[(d^T P)P \times D] = -2(d^T P)^2 \lambda \mu [PXY]^2. \end{aligned}$$

Gleichung (7.4) hat diesmal die Form

$$0 = 2(d^T D)^2[PFX][PFY][PXY]^2 + 2\gamma\lambda\mu(d^T P)^2[PXY]^2$$

Außer für die Punkte $P \in \Omega$ auf der Ferngeraden kann $[PXY]^2$ gekürzt werden. Dies resultiert in einer quadratischen Form für P , die offensichtlich die Gestalt (7.3) hat.

Sei schließlich $\Omega^\Delta = XX^T$ vom Rang 1. Dann geht jedes Lot auf d durch X , d.h. jeder Punkt hat von d den Abstand Null. In der Tat ist $\Omega^\Delta[P \times L] \equiv 0$. Also muss für endliche Verhältnisse auch $\Omega^\Delta[P \times F] = 0$ gelten, d.h. der gesuchte Kegelschnitt ist die Doppelgerade $X \times F$. Im Büschel (7.3) werden dann nur die Randfälle $\lambda = 0$ und $\mu = 0$ angenommen. \boxtimes

In den ungekrümmten Ebenen (Euklid, Minkowski) definieren konstante Abstandsverhältnisse zu Brennpunkt und Direktrix also weiterhin Kegelschnitte, da die Invarianten (5.11) dann gerade die Quadrate der Abstände sind. In den singulären Ebenen (dual-Euklid, Galiley, dual-Minkowski) entarten diese Kegelschnitte zur Doppelgeraden durch Brennpunkt und absoluten Pol.

In den gekrümmten (regulären) Ebenen bleibt nur die Kurve der Punkte mit gleichen Abständen zu Brennpunkt und Direktrix ein regulärer Kegelschnitt. (Das Tangentenpaar durch den Brennpunkt an Ω und die Direktrix als Doppelgerade sind weiterhin singuläre Kegelschnitte mit Abstandsverhältnis 0 bzw. ∞ .) Eine ähnliche Sonderrolle hatte schon der Thales-Kegelschnitt unter den Kurven fester Peripheriewinkel gespielt.

Übung 7.12 *Gib einen Algorithmus an, der die Mittelpunkte der **Kreise** (bezüglich eines beliebig vorgegebenen absoluten Kegelschnitts) findet, die durch 2 Peripheriepunkte und eine Tangente bestimmt sind.*

Übung 7.13 *Gib einen Algorithmus an, der die Mittelpunkte der **Kreise** (bezüglich eines beliebig vorgegebenen absoluten Kegelschnitts) findet, die durch einen Peripheriepunkt und zwei Tangenten bestimmt sind.*

8 Geodäten & Parallelverschiebung

8.1 Der geodätische Fluss

Geodäten können auf verschiedene Weise charakterisiert werden. Ist ein geeignetes Abstandsmaß gegeben, so sind Geodäten, die zwei gegebene Punkte P, Q verbinden, gerade die kritischen unter allen Kurven von P nach Q , natürlich bezogen auf die durch das Abstandsmaß definierten Bogenlänge. Ist ein Paralleltransport (auf den orientierten Geraden) gegeben, so nennen wir diejenigen Kurven Geodäten, deren Tangentenbündel unter Paralleltransport entlang der jeweiligen Kurve invariant bleiben. In infinitesimaler Beschreibung werden die Geodäten zu den Trajektorien des geodätischen Flusses auf dem (Einheits-)Tangentialbündel der Ebene.

Sind Geodäten als kritische Kurven definierbar, kann man den Paralleltransport so festlegen, dass die Geodäten auch autoparallel sind. Es ist ebenfalls möglich — aber schwieriger — aus dem Paralleltransport eine passende Metrik zu gewinnen.

In den elliptischen, euklidischen und Beltrami-Klein-Ebenen sind die Geodäten die Kurven minimaler Länge. (Umwege sind länger.) In den Anti-deSitter-, DeSitter- und Minkowski-Ebenen sind sie die Kurven maximaler Länge. (Umwege sind kürzer.) In den anderen drei Geometrien gibt es keine Kurven kritischer Länge. (In der klassischen Mechanik ist die Länge jeder Kurve zwischen (q_1^i, t_1) und (q_2^i, t_2) gleich dem Abstand $t_2 - t_1$ der Endpunkte. Die Definition kritischer Kurven erfordert die Wahl eines Wirkungsintegrals.)

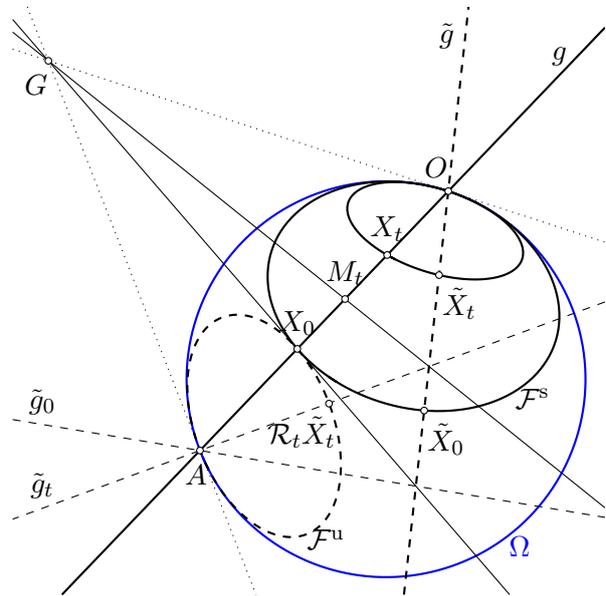
Der absolute Kegelschnitt legt per Polarität zu jeder Geraden ein Normalenbündel fest. Die Spiegelungen an einer geraden Anzahl (o.B.d.A. zwei, wobei eine festgehalten werden kann) von Normalen bilden eine kontinuierliche Gruppe orientierungserhaltender Kongruenzen, die die Ursprungsgerade festhalten. In der Tat ist die Gruppe wieder eine projektive Gerade. Diese Gruppe definiert die Parallelverschiebungen entlang der Geraden. Sind zwei Punkte P, Q gegeben, so wird die Parallelverschiebung von P nach Q entlang der Verbindungsgeraden $P \times Q$ auch durch die Spiegelung an dem auf dem Pfad liegenden Mittelpunkt (5.12) geleistet. Diese Spiegelung transportiert allerdings nur das Geradenbüschel parallel. Sind die Geraden gerichtet, dann muss eine zweite Spiegelung um den Anfangspunkt vorausgeschickt oder um den Endpunkt nachgestellt werden. Vergleiche auch Übung 8.2.

Geodäten und Geraden sind so dieselben Kurven. (Das macht die projektive Einbettung der metrischen Geometrien so nützlich.) Dies folgt einerseits aus der Dreiecksungleichung (falls Ω^Δ wenigstens Rang 2 hat) und andererseits aus der Definition der

Die nachfolgenden Betrachtungen werden zeigen, dass wir mit Recht den Horozyklus $\mathcal{F}_{X,V}^s$ mit Mittelpunkt O und Peripheriepunkt X die stabile Faser von (X, V) und den Horozyklus $\mathcal{F}_{X,V}^u$ mit Mittelpunkt A und Peripheriepunkt X die instabile Faser von (X, V) nennen können. Dabei werden die Punkte von $\mathcal{F}_{X,V}^s$ durch die Tangentialvektoren in Richtung O und die Punkte von $\mathcal{F}_{X,V}^u$ durch die Tangentialvektoren aus Richtung A ergänzt. Dann ist $\mathcal{F}_{\tilde{X},\tilde{V}}^s = \mathcal{F}_{X,V}^s$ für jeden Punkt $(\tilde{X}, \tilde{V}) \in \mathcal{F}_{X,V}^s$. Die Invarianz der Faserungen haben wir schon gesehen, fehlt noch die Stabilität.

Sei $G = \Omega^{-1}g$ der Pol von g . Die Spiegelung an $G \times X$ bildet g und X auf sich sowie $\mathcal{F}_{X,V}^s$ auf $\mathcal{F}_{X,-V}^s$ ab. Dabei stimmen die Basispunkte von $\mathcal{F}_{X,-V}^s$ mit denen von $\mathcal{F}_{X,V}^u$ überein, die Tangentialvektoren sind entgegengesetzt.

Ist M_t ein Mittelpunkt von $X_0 = X$ und $X_t = \pi\Phi_t(X, V)$, so bildet die Spiegelung \mathcal{R}_t an $G \times M_t$ entsprechend $\pi\Phi_t(\mathcal{F}_{X,V}^s)$ auf $\pi\mathcal{F}_{X,V}^u$ (mit umgekehrten Tangentialvektoren) ab. Eine zweite (feste) Gerade \tilde{g} durch O wird auf eine Gerade \tilde{g}_t durch A abgebildet, mit $\tilde{g}_t \rightarrow g$ für $t \rightarrow \infty$. Die Spiegelung lässt (als Kongruenzabbildung) die Abstände entlang der Faser gleich. Also ist der Abstand von $X_t = \pi\Phi_t(X, V)$ und $\tilde{X}_t = \pi\Phi_t(\tilde{X}, \tilde{V})$ gleich dem von X_0 und $\mathcal{R}_t\tilde{X}_t$ (bezüglich der hyperbolischen Metrik!) und geht für $t \rightarrow \infty$ gegen Null.

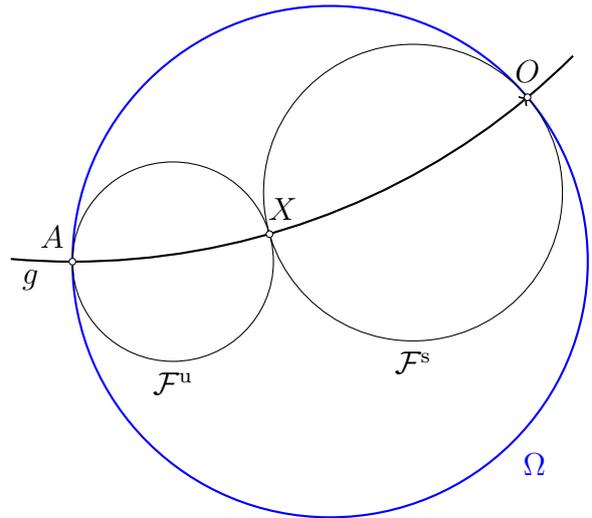


Entlang der stabilen Faser werden die Abstände der Basispunkte unter Φ_t für wachsendes t kleiner und verschwinden im Limes $t \rightarrow \infty$. (Das ist der Grund für die Namensgebung!) Entlang der instabilen Faser werden die Abstände der Basispunkte unter Φ_t für fallendes t kleiner und verschwinden im Limes $t \rightarrow -\infty$. Entlang der Geodäte bleiben die Abstände gleich. Lokal, nahe (X, V) kann das (3-dimensionale) Einheitstangentenbündel als direkte Summe dieser drei Kurven dargestellt werden.

Übung 8.1 Zeige, dass (in der euklidischen Ebene) die Schmiegekreise in den Scheitelpunkten einer Ellipse (Hyperbel, Parabel) dort Kontakt dritter Ordnung haben. Dies begründet die Näherungskonstruktion einer Ellipse durch ihre Scheitel-Schmiegekreise. Hinweis: Zeige, dass die Scheitel-Schmiegekreise Horozyklen bezüglich des Kegelschnitts sind.

Die Einbettung der Lobachevski-Geometrie in die projektive Ebene in Form des Beltrami/Klein-Modells ist eine geradentreue Abbildung: Geodäten sehen wie gewohnte Geraden aus. Sie entsteht durch Projektion der Einheitsschale $\{t^2 - x^2 - y^2 = 1, t > 0\}$ des $(1+2)$ -dimensionalen Minkowski-Raums aus dem Koordinatenursprung auf die Ebene $\{t \equiv 1\}$. Die Geodäten der Schale sind die Schnitte mit den Ebenen durch den Mittelpunkt und werden deshalb in dieser Darstellung auf gewohnte Geraden abgebildet.

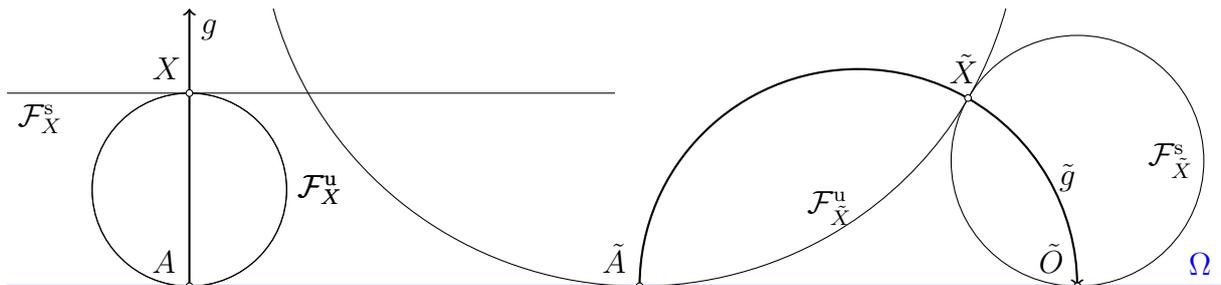
Wird stattdessen aus dem Scheitel $(x, y, t) = (0, 0, -1)$ der anderen Schale projiziert, ergibt sich als stereographische Projektion das ebenfalls auf Beltrami zurückgehende Poincarésche Kreisscheiben-Modell, das nun nicht mehr geradentreu dafür aber winkeltreu ist: Der Winkel wird euklidisch gemessen. Es ist aber immerhin konform und kreisverwandt, so dass die Geodäten nun Kreisbögen sind, die auf Ω senkrecht stehen. Auch die Horozyklen erhalten nun das Aussehen gewohnter Kreise.



Fasst man das Poincaré-Modell als Einheitskreisscheibe der komplexen Zahlenebene auf, wird es durch die konforme, winkeltreue (Möbius-) Transformation

$$w \mapsto -\mathbf{i} \frac{w + \mathbf{i}}{w - \mathbf{i}}, \quad w = x + \mathbf{i}y, \tag{8.1}$$

in das gleichfalls auf Beltrami zurückgehende Poincarésche Halbebenenmodell überführt. Die inneren Punkte der hyperbolischen Ebene bilden die Menge $\{w = x + \mathbf{i}y \mid y > 0\}$ mit den Fernpunkten $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und der Metrik $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$. Geodäten sind dann die vertikalen Halblinien und die (euklidischen) Halbkreise mit Mittelpunkt auf der reellen Achse. Der geodätische Fluss lässt sich o.B.d.A an den vertikalen Linien studieren, deren stabile Fasern die horizontalen Linien (mit vertikalen Tangentenvektoren) sind. Invarianz und Abstandsverkleinerung unter dem geodätischen Fluss sind dort offensichtlich.



Die Möbiustransformationen sind die Isometrien und bilden die vertikalen Linien auf die Halbkreise ab. Die horizontalen Linien werden auf (euklidische) Kreise abgebildet, die die reelle Achse berühren. Dies sind also die Horozyklen im Halbebenenmodell. Die die reelle Achse in \tilde{O} berührenden Kreise bilden das Bündel stabiler Fasern jeder Geodäten mit ω -Limespunkt \tilde{O} .

Die Übergänge zwischen den einzelnen Darstellungen werden durch folgende Transformationen erreicht: Sei $Q = (x, y) \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ bzw. $Q \sim (x, y, 1) \in \mathbb{RP}^2$ ein innerer Punkt des Beltrami/Klein-Modells.

(i) Projektion auf die obere Schale des Hyperboloids $\{t^2 - x^2 - y^2 = 1\}$:

$$Q \mapsto \frac{1}{\gamma}(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{mit } \gamma = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \in \mathbb{R}. \quad (\text{Quadrik})$$

(ii) Projektion der Schale aus dem Punkt $(0, 0, -1)$ auf die Ebene $\{t \equiv 0\}$:

$$Q \mapsto w = \frac{x + iy}{1 + \gamma} \in B_1(0) \subset \mathbb{C}. \quad (\text{Beltrami/Poincaré-Modell})$$

(iii) Verknüpfung von (ii) mit der konformen Abbildung (8.1):

$$Q \mapsto \frac{2x(1 + \gamma) + i((1 + \gamma)^2 - x^2 - y^2)}{x^2 + (1 + \gamma - y)^2} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (\text{Halbebenenmodell})$$

Die Halbebene stellt eine Mercator-Karte der Lobachevski-Geometrie dar: Die vertikalen Linien bilden eine ausgewählte Geodätenschar, deren horizontaler Abstand nach oben immer kleiner wird und im Unendlichen verschwindet. Der Maßstab auf den Vertikalen wird an den Maßstab der Horizontalen so angepasst, dass Winkeltreue entsteht. Die Metrik der Halbebene lautet entsprechend $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$.

Auch die DeSitter-Geometrie besitzt eine solche durch stereographische Projektion vermittelte winkeltreue Darstellung: Das Winkelmaß ist das der Minkowski-Geometrie. Zunächst kann das Kleinsche Modell als Projektion des einschaligen Hyperboloids $\{t^2 - x^2 - y^2 = -1\}$ aus dem Mittelpunkt auf die Ebene $\{y \equiv 1\}$ aufgefasst werden. Wieder sind wegen der Symmetrie die Geodäten auf dem Hyperboloid die Schnitte mit den Ebenen durch den Mittelpunkt, also Geraden auf der Projektionsebene.

Wird nun nicht mehr aus dem Mittelpunkt, sondern aus dem Punkt $(x, y, t) = (0, -1, 0)$ auf die Ebene $\{y \equiv 0\}$ projiziert, werden die Geodäten zu Hyperbelabschnitten. Diese stereographische Projektion ist nun wieder winkeltreu und kreisverwandt, wobei unter Kreisen die Kreise der Minkowski-Geometrie zu verstehen sind. Die Geodäten sind nun also Hyperbelbögen. Zeitartige Geodäten laufen Minkowski-senkrecht in die Ω -Hyperbel ein. Raumartige Geodäten schneiden Ω nicht (in reellen Punkten).

Wichtig wird jetzt der Übergang zur Halbebene. Die Transformation ist formal gleich der für die Lobachevski-Geometrie benutzten Möbius-Transformation (8.1). Durch die übliche Identifikation $\mathbf{i}^2 = -1$ erhält man die Abbildung des Einheitskreises auf die reelle Achse. Setzt man an aber $\mathbf{i}^2 = 1$, ergibt sich eine pseudokonforme Abbildung, die die absolute Hyperbel der DeSitter-Geometrie auf die reelle Achse abbildet. Die Metrik der Halbebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ lautet dann analog zur Lobachevski-Geometrie $ds^2 = (dt^2 - dx^2)/t^2$.

Ebenfalls in Analogie zur Lobachevski-Geometrie werden die Übergänge zwischen den einzelnen Darstellungen wieder durch folgende Transformationen erreicht: Sei $Q = (x, t) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $Q \sim (x, 1, t) \in \mathbb{RP}^2$ ein äußerer Punkt der hyperbolischen Ebene.

(i) Projektion auf das (einschalige) Hyperboloid $\{t^2 - x^2 - y^2 = -1\}$:

$$Q \mapsto \frac{1}{\gamma}(x, 1, t) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{mit } \gamma = \sqrt{1 + x^2 - t^2} \in \mathbb{R}. \quad (\text{Quadrik})$$

(ii) Projektion des Hyperboloids aus dem Punkt $(0, -1, 0)$ auf die Ebene $\{y \equiv 0\}$:

$$Q \mapsto w = \frac{x + \mathbf{i}t}{1 + \gamma} \in \mathbb{C}. \quad (\text{Beltrami/Poincaré-Modell})$$

(iii) Verknüpfung von (ii) mit der pseudokonformen Abbildung (8.1), $\mathbf{i}^2 = 1$:

$$Q \mapsto \frac{-2x(1 + \gamma) + \mathbf{i}(t^2 - x^2 - (1 + \gamma)^2)}{x^2 - (1 + \gamma - t)^2} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (\text{Halbebene})$$

Der geodätische Fluss kann beispielhaft an der Geodätenschar studiert werden, die von den Ebenen um die Gerade $\{y = t, x = 0\}$ aus dem Hyperboloid in \mathbb{R}^3 ausgeschnitten wird. Im Kleinschen Bild liegt der Limespunkt O auf dem oberen Ast, und die Schar wird von den durch O laufenden zeitartigen Geraden gegeben. Die (die instabilen Fasern bildenden) Horozyklen sind Hyperbeln, die Ω in O tangieren. Der Limespunkt A liegt in unserer Darstellung auf dem unteren Ast.

Im Halbebenenmodell hat die Geodätengleichung aus der Extremalenbedingung wegen der Homogenität in x ein erstes Integral: Mit $u = dx/dt$ lautet es $\tau u = t\sqrt{1 - u^2}$ für zeitartige Geodäten und $\tau u = t\sqrt{u^2 - 1}$ für raumartige, beide mit freier Konstanten τ . Die Lösungen $t^2 - (x - x_0)^2 = -\tau^2$ für zeitartige und $t^2 - (x - x_0)^2 = \tau^2$ für raumartige Geodäten sind Hyperbeln, deren Mittelpunkte auf dem Rand liegen. Zeitartige Geodäten laufen wieder gewohnt senkrecht in den Limespunkt ein. Die Vertikalen bilden ein spezielles Geodätenbüschel, das wie im Lobachevski-Fall ersichtlich konvergiert. Die Horozyklen sind ebenfalls Hyperbeln, die den Rand im Limespunkt berühren, also einer Gleichung $(t - t_0)^2 - x^2 = \tau^2$ genügen.

Lobachevski-Geometrie		Beltrami Klein		DeSitter-Geometrie
		Beltrami Poincaré		
		pseudo-/konform, winkeltreu, kreisverwandt		
			Mercator	

Wir haben nun eine Mercator-Karte der DeSitter-Geometrie vor uns, die in der Kosmologie eine erhebliche Rolle spielt. Die Vertikalen sind die Weltlinien virtueller Objekte, die die kosmische Expansion markieren und deren Pekuliarbewegung gegen diese homogene Expansion verschwindet. Zu diesem Zweck haben wir auf die *untere* Halbebene transformiert, d.h. Transformation (8.1) wurde ersetzt durch $w \mapsto \mathbf{i}(w - \mathbf{i})/(w + \mathbf{i})$, nach wie vor als pseudokonforme Abbildung mit $\mathbf{i}^2 = 1$. Die Zeitkoordinate zeigt den Ablauf einer Art Lichtuhr (Abschnitt 5.6), deren Lichtpendel zwischen zwei dieser Objekte hin und her läuft. Die Bogenlänge auf den Vertikalen divergiert bei Annäherung an Ω , die Zeitkoordinate (auch Konformzeit genannt) nicht. Die Objekte leben unendlich lang, aber die Lichtzeit bleibt stehen.

8.3 Parelleltransport & Krümmung

Der Paralleltransport entlang der Strecke von A nach B wird durch die auf den Geraden (durch A) operierende Spiegelung am Mittelpunkt $M = \sqrt{\Omega[B]}A \pm \sqrt{\Omega[A]}B$ vermittelt,

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow B} = \mathcal{R}_M = \text{Invol}(M, \Omega M) = \Omega[M]\mathcal{I} - 2\Omega M M^T,$$

vergleiche (3.3) und Übung 8.2. Beachte, dass auf den Geraden die (inverse) Transponierte wirkt. Diese Spiegelung transportiert nur das Geradenbüschel parallel. Sind die Geraden gerichtet, dann muss eine zweite Spiegelung um den Anfangspunkt vorausgeschickt oder um den Endpunkt nachgestellt werden.

Übung 8.2 *Seien P, X, Q kollinear. Liege X zwischen P und Q . (In der hyperbolischen Ebene ist das eine Einschränkung an X , in der elliptischen Ebene die Definition von „zwischen.“) Sei M der Mittelpunkt zwischen P, Q (d.h. auf demselben Geradenabschnitt, auf dem auch X liegt). Seien m_1, m_2 die Mittelsenkrechten zwischen P, X und X, Q . Seien $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ die Spiegelungen an m_1 bzw. m_2 , eingeschränkt auf die Geraden durch P bzw. X . Sei \mathcal{R} die Spiegelung an M , eingeschränkt auf die Geraden durch P . Zeige: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$.*

Beide Mittelpunkte (sofern sie nicht auf Ω liegen) können verwendet werden, ergeben aber nicht dieselbe Parallelverschiebung. Die Parallelverschiebung auf der projektiven Ebene erhält eine Zweideutigkeit, weil die projektive Ebene nicht orientierbar ist. Verschieben wir längs einer Geraden von einem Punkt zum anderen, ist die Richtung nicht festgelegt. Die Geradenbüschel werden zwar kongruent aufeinander abgebildet, gleich um welchen der beiden Mittelpunkte gespiegelt wird, aber der Drehsinn der beiden Bilder ist verschieden. Die Krümmung, die wir durch Parallelverschiebung um ein geschlossenes

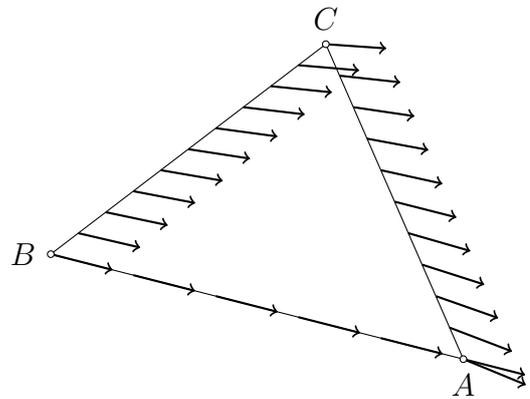
geodätisches Vieleck nachweisen wollen, ist auf einer nicht orientierbaren Fläche nur ein lokales Phänomen. Wenn wir eine begrenztes Stück der projektiven Ebene wählen, das die Charakterisierung einer Strecke und ihrer inneren Punkte erlaubt, wird der Paralleltransport eindeutig. Er entsteht durch die Operationen $\mathcal{T}_{A \rightarrow B} = \mathcal{R}_B \mathcal{R}_M = \mathcal{R}_M \mathcal{R}_A$. Für innere Geraden (also die Lobachevski-Geometrie und die zeitartigen Geraden der DeSitter-Geometrie ist das keine Frage, wohl aber für die Punktpaare auf äußeren Geraden.

Mit der Normierung $\Omega[A] = \Omega[B] = \Omega[C] = 1$ und der Einschränkung auf die (nicht orientierten) Geraden durch den Startpunkt erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{T}_{A \rightarrow B} &= (1 + \omega_C) \mathcal{I} - (\Omega A + \Omega B) B^T, \\ \frac{1}{2} \mathcal{T}_{B \rightarrow C} &= (1 + \omega_A) \mathcal{I} - (\Omega B + \Omega C) C^T, \\ \frac{1}{2} \mathcal{T}_{C \rightarrow A} &= (1 + \omega_B) \mathcal{I} - (\Omega C + \Omega A) A^T, \end{aligned}$$

mit $\omega_A = B^T \Omega C$, $\omega_B = A^T \Omega C$, $\omega_C = A^T \Omega B$. Zusammengesetzt ergeben die drei Translationen eine Selbstabbildung des Geradenbüschels durch A als projektive Abbildung der (dualen) projektiven Gerade $\{g \mid g^T A = 0\}$. Dabei bleiben Winkel erhalten und die Tangenten aus A an Ω sind fix. Es handelt sich also um eine Drehung, deren Abweichung von der Identität gerade die Diskrepanz zwischen Nebenwinkel und der Zusammensetzung der gegenüberliegenden Innenwinkel und damit Ausdruck der Krümmung der metrischen Ebene ist, vergleiche Abschnitt 6.4.

Wir verschieben eine Dreiecksseite zunächst entlang der Dreiecksseite selbst und anschließend entlang der anderen beiden Seiten. Die durch diesen Umlauf entstehende Diskrepanz zur Originalrichtung ist genau der Unterschied zwischen Außenwinkel und Zusammensetzung der gegenüberliegenden Innenwinkel, vergleiche Lemma 6.19 und Übung 6.21.



Übung 8.3 Für dem Umlauf $\mathcal{T}_\Delta = \frac{1}{8} \mathcal{T}_{C \rightarrow A} \mathcal{T}_{B \rightarrow C} \mathcal{T}_{A \rightarrow B}$ um das Dreieck gilt

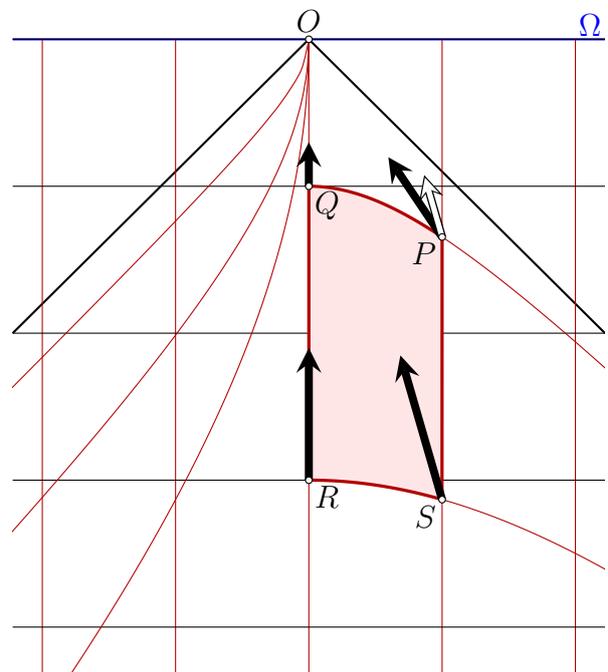
$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\Delta &= (\omega_A + 1)(\omega_B + 1)(\omega_C + 1) \mathcal{I} + ((1 - \omega_B)(\omega_C - \omega_B) - 2\omega_B(\omega_A + \omega_B)) \Omega A B^T \\ &\quad + (\omega_B^2 - 1) \Omega B B^T + ((1 - \omega_B)(\omega_C + 1) + 2(\omega_A + \omega_B)) \Omega C B^T \\ &\quad + (\omega_C + 1)(\omega_B + \omega_C) \Omega A C^T - (\omega_C + 1)(\omega_B + 1) \Omega B C^T + (\omega_C^2 - 1) \Omega C C^T. \end{aligned}$$

Für ungekrümmte Ebenen, d.h. Ω vom Rang 1, ist o.B.d.A. $\omega_A = \omega_B = \omega_C = 1$ und schließlich $\mathcal{T}_\Delta \sim \mathcal{I}$.

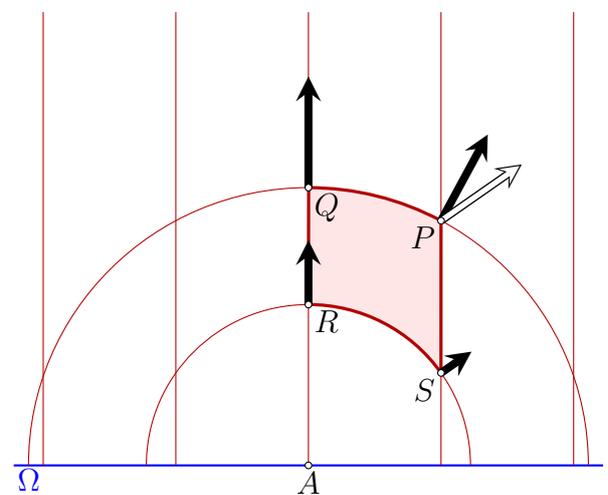
Wir sehen uns den Paralleltransport in der Lobachevski- und der DeSitter-Geometrie auf den beiden Mercator-Karten an und wählen dazu ein geodätisches Vierseit zwischen einem Paar des vertikalen Geodätenbüschels.

Das DeSitter-Modell beschreibt einen leeres Universum mit fester Grundkrümmung. Die den Horozyklen entsprechenden Ebenen (die Räume fester kosmologischer Zeit) erben eine euklidische Geometrie. Die einfachste Verallgemeinerung (das Standardmodell) betrifft nun ausschließlich den Verlauf des Maßstabs im geodätischen Fluß, die Expansionsrate. Ist das Universum nicht leer, bleibt aber dennoch homogen und isotrop, bestimmt die Friedmann-Gleichung ihren Verlauf.

In der Mercator-Karte der DeSitter-Geometrie finden wir den Limespunkt O mit den Tangenten an Ω , die vertikalen Geodäten der Expansionsmarker, drei weitere zeitartige Geodäten (links) und zwei raumartige Geodäten (rechts). An den Ecken des Geodätenvierecks $PQRS$ sind die Normalen zu den raumartigen Geodäten gezeichnet. Man beachte das Minkowski-Maß der Winkel und Längen. Wir verschieben den Vektor bei P über Q und R nach S . Da die folgende Verschiebung nach P an der vertikalen Geodäten die Neigung der Vektoren nicht ändert, ergibt sich der die Krümmung indizierende Unterschied.



In der Mercator-Karte der Lobachevski-Geometrie finden wir die vertikalen Geodäten sowie zwei geodätische Kreisbögen um den Limespunkt A . An den Ecken des Geodätenvierecks $PQRS$ sind die Normalen zu den Kreisbögen gezeichnet. Wir verschieben den Vektor bei P über Q und R nach S . Da die folgende Verschiebung nach P an der vertikalen Geodäten die Neigung der Vektoren nicht ändert, ergibt sich der die Krümmung indizierende Unterschied.



9 Die drei Brennpunkt-teilenden Ellipsen

13. Lektion

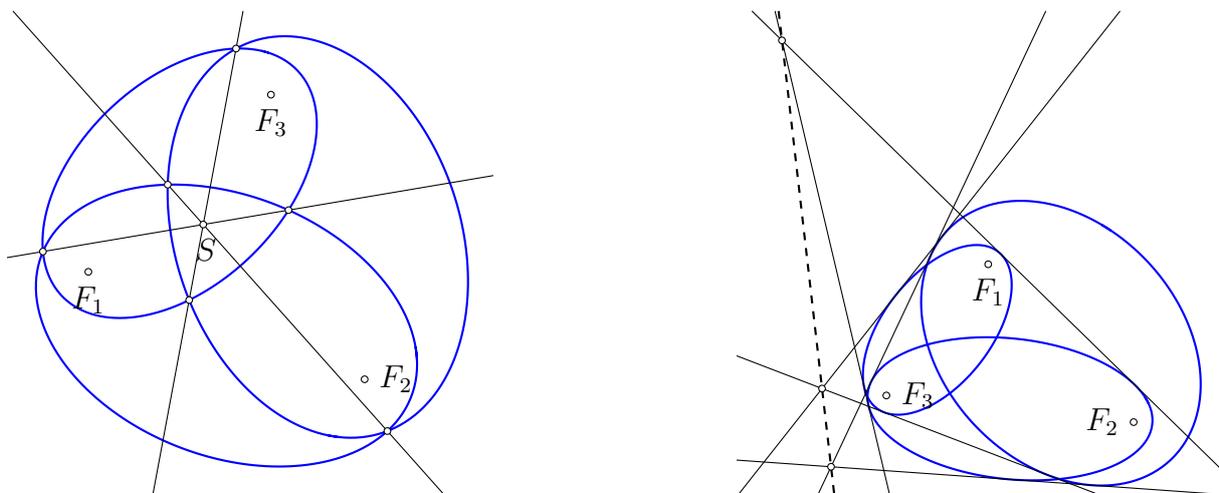
9.1 Historisches

In den 30er Jahren erschienen in der *Mathematical Gazette* einige Notizen [Eric Harold Nevilles](#) zu Eigenschaften dreier Ellipsen, die sich drei Brennpunkte teilen. Folgender Satz wird in der euklidischen Ebene bewiesen [1]:

Theorem 9.1 *Teilen sich drei Ellipsen paarweise je einen Brennpunkt und liegt keine Ellipse vollständig innerhalb einer anderen, so schneiden sich die Geraden durch die paarweisen Schnittpunkte in einem gemeinsamen Punkt.*

In diesen Kontext gehört auch ein weiterer, sehr ähnlicher Satz aus [4]:

Theorem 9.2 *Teilen sich drei Ellipsen paarweise je einen Brennpunkt und liegt keine Ellipse vollständig innerhalb einer anderen, so schneiden sich die Paare gemeinsamer Tangenten in drei kollinearen Punkten.*



Beide Sätze gelten auch, wenn sich die drei Ellipsen einen einzigen gemeinsamen Brennpunkt teilen. Darüber hinaus ist die Inzidenzstruktur reichhaltiger als in diesen euklidischen Formulierungen ersichtlich [1]. Auch wird eine projektive Verallgemeinerung bereits durch Neville angedeutet [2].

- [1] E. H. Neville. A focus-sharing set of three conics. *Math. Gaz.*, 20(239):182–183, 1936.
- [2] E. H. Neville. The focus-sharing conics again. *Math. Gaz.*, 21(242):56, 1937.
- [3] B. E. Lawrence. Note on the focus sharing conics. *Math. Gaz.*, 21(243):160–161, 1937.
- [4] I. I. Bogdanov. Two theorems on the focus-sharing ellipses: a three-dimensional view. *J. Class. Geom.*, 1:1–5, 2012.

9.2 Allgemeine projektive Formulierungen

Wir wollen die projektive Verallgemeinerungen der vorgenannten Sätze untersuchen, die dann automatisch in allen Cayley-Klein Geometrien gelten. Am Interessantesten ist dabei die Verallgemeinerung von Theorem 9.1:

Theorem 9.3 *Seien F_1, F_2, F_3 drei paarweise verschiedene Punkte, die paarweise jeweils Brennpunktpaare $(F_2, F_3), (F_1, F_3), (F_1, F_2)$ dreier regulärer Kegelschnitte $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ bezüglich eines vierten Kegelschnitts (Ω, Ω^Δ) sind. Dann existiert ein vollständiges Viereck P_1, \dots, P_4 , deren Seitenpaare durch die (je vier) Schnittpunkte $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3$ der Kegelschnittpaare verlaufen, d.h. es gibt vier Schnittpunkte P_1, \dots, P_4 von je drei Linien durch je zwei gemeinsame Punkte der Kegelschnittpaare.*

Die Seiten dieses Vierecks sind die Brennlinien der drei Kegelschnittpaare $(\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_l)$, die durch den jeweiligen Diagonalpunkt D_m verlaufen, der Pol der Diagonalen durch den jeweiligen gemeinsamen Brennpunkt F_m ist. (www.stefan-liebscher.de/geometry)

Haben die drei Kegelschnitte einen gemeinsamen Brennpunkt, so kann auf den vermittelnden absoluten Kegelschnitt verzichtet werden:

Theorem 9.4 *Seien $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ reguläre Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt F , d.h. die Tangentenpaare aus F an die drei Kegelschnitte stimmen überein. Dann existiert ein vollständiges Viereck P_1, \dots, P_4 , deren Seitenpaare durch die (je vier) Schnittpunkte $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3$ der Kegelschnittpaare verlaufen, d.h. es gibt vier Schnittpunkte P_1, \dots, P_4 von je drei Linien durch je zwei gemeinsame Punkte der Kegelschnittpaare.*

Die Seiten dieses Vierecks sind die Brennlinien der drei Kegelschnitt-Paare $\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_l$, die durch den jeweiligen Diagonalpunkt verlaufen, der Pol der Diagonalen durch den gemeinsamen Brennpunkt F ist.

Der Punkt F wird zum Brennpunkt der Kegelschnitte bezüglich jedes absoluten Kegelschnitts (Ω, Ω^Δ) , der tangential an das gemeinsame Tangentenpaar ist.

Bei der Verallgemeinerung von Theorem 9.2 ist zu beachten, dass jeweils ein Paar gemeinsamer Tangenten durch den gemeinsamen Brennpunkt verläuft:

Theorem 9.5 *Seien F_1, F_2, F_3 drei paarweise verschiedene Punkte, die paarweise jeweils Brennpunktpaare $(F_2, F_3), (F_1, F_3), (F_1, F_2)$ dreier regulärer Kegelschnitte $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ bezüglich eines vierten Kegelschnitts (Ω, Ω^Δ) sind. Dann bilden die gemeinsamen Brennpunkte F_1, F_2, F_3 zusammen mit den ihnen (als Brennpunktpaare bezüglich $\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_l$) jeweils*

gegenüberliegenden Brennpunkten $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3$ ein vollständiges Vierseit. Es gibt also vier Linien, auf denen je 3 Schnittpunkte gemeinsamer Tangenten liegen.

Haben die drei Kegelschnitte einen gemeinsamen Brennpunkt, so kann wie zuvor auf den vermittelnden absoluten Kegelschnitt verzichtet werden:

Theorem 9.6 Seien $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt F , d.h. die Tangentenpaare aus F an die drei Kegelschnitte stimmen überein. Dann sind Schnittpunkte der drei Paare übriger gemeinsamer Tangenten der Kegelschnittpaare kollinear.

Die duale Formulierung der letzten Aussage ist auch als 3-conics-theorem bekannt:

Theorem 9.7 Schneiden sich drei (reguläre) Kegelschnitte in zwei gemeinsamen Punkten A, B , so sind die drei nicht durch A, B verlaufenden gemeinsamen Sehnen der Kegelschnittpaare konkurrent. (www.stefan-liebscher.de/geometry)

Übung 9.8 Gib duale Formulierungen der übrigen drei Theoreme an.

9.3 Algebraische Beweise

Beweis. (Theorem 9.3) Seien also $\mathcal{C}_k, k = 1, 2, 3$ die regulären Kegelschnitte, und jeweils F_ℓ, F_m ein Brennpunktpaar von $(\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_k^{-1})$ und (Ω, Ω^Δ) für $\{k, \ell, m\} = \{1, 2, 3\}$. Sei nun F_m, \tilde{F}_m jeweils ein Brennpunktpaar von $\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_\ell$ für $\{k, \ell, m\} = \{1, 2, 3\}$. Ist $F_m \neq \tilde{F}_m$ (d.h. keine Kreislage), finden wir die Diagonallinien

$$d_m \sim F_m \times \tilde{F}_m, \quad m = 1, 2, 3,$$

und die gegenüberliegenden Diagonalepunkte

$$D_m \sim \mathcal{C}_k F_m \times \mathcal{C}_\ell \tilde{F}_m \sim \mathcal{C}_k^{-1} d_m \sim \mathcal{C}_\ell^{-1} d_m, \quad k, \ell, m = \{1, 2, 3\},$$

(Der Spezialfall der Kreislage wählen wir stattdessen eine beliebige (nicht tangentielle) Gerade d_m durch F_m als Diagonale und deren Pol D_m auf dem dualen Mittelpunkt als Diagonalepunkt.)

Die gesuchten Brennpunktpaare (die das behauptete vollständige Viereck bilden sollen) bilden singuläre Kegelschnitte

$$\mathcal{N}_m \sim \mathcal{C}_\ell [D_m] \mathcal{C}_k - \mathcal{C}_k [D_m] \mathcal{C}_\ell, \quad \{k, \ell, m\} = \{1, 2, 3\}.$$

Jeder Summand ist quadratisch in D_m . Wie können also D_m einmal durch $\mathcal{C}_k^{-1}d_m$ und einmal durch $\mathcal{C}_\ell^{-1}d_m$ ersetzen:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_m &\sim (d_m^\top \mathcal{C}_k^{-1}) \mathcal{C}_\ell (\mathcal{C}_\ell^{-1} d_m) \mathcal{C}_k - (d_m^\top \mathcal{C}_k^{-1}) \mathcal{C}_k (\mathcal{C}_\ell^{-1} d_m) \mathcal{C}_\ell \\ &= \mathcal{C}_k^{-1}[d_m] \mathcal{C}_k - \mathcal{C}_\ell^{-1}[d_m] \mathcal{C}_\ell, \quad \{k, \ell, m\} = \{1, 2, 3\}.\end{aligned}$$

Wir fixieren daher Vertreter und wählen

$$\mathcal{N}_m = \mathcal{C}_{m+1}^{-1}[d_m] \mathcal{C}_{m+1} - \mathcal{C}_{m-1}^{-1}[d_m] \mathcal{C}_{m-1} \quad (m \bmod 3).$$

Nun benutzen wir die Voraussetzung, dass F_k, F_ℓ auch Brennpunkte bezüglich des vierten Kegelschnitts sind: Die Doppelgerade durch die jeweiligen Brennpunktpaare liegt im dualen Büschel, d.h. es gibt Konstanten λ_m, μ_m , so dass

$$\mathcal{C}_m^{-1} = \lambda_m (F_k F_\ell^\top + F_\ell F_k^\top) + \mu_m \Omega^\Delta, \quad \{k, \ell, m\} = \{1, 2, 3\}.$$

(Beachte, dass selbst für eine Doppelgerade Ω die angegebene Familie nicht trivial sein kann. In der Tat können drei Punkte F_1, F_2, F_3 nicht paarweise in den absoluten Polen liegen.) Wir erhalten

$$\mathcal{C}_m^{-1}[d_k] = \mu_m \Omega^\Delta[d_k], \quad \mathcal{C}_m^{-1}[d_\ell] = \mu_m \Omega^\Delta[d_\ell], \quad \{k, \ell, m\} = \{1, 2, 3\}.$$

Dies liefert

$$0 = \sum_{m=1}^3 \Omega^\Delta[d_{m-1}] \Omega^\Delta[d_{m+1}] \mathcal{N}_m \quad (m \bmod 3).$$

Die drei singulären Kegelschnitte \mathcal{N}_m , $m = 1, 2, 3$, sind also linear abhängig, d.h. sie liegen in einem gemeinsamen Kegelschnittbüschel und haben 4 gemeinsame Punkte. \boxtimes

Auch singuläre Kegelschnitte \mathcal{C}_k können erlaubt werden. Wählen wir F_m in einem der absoluten Pole von $(\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_k^\Delta)$, so sind die übrigen Voraussetzungen und Behauptungen des Satzes trivial erfüllt. Die einzige Bedingung an allgemeine Lage der Objekte ist, dass $F_k F_\ell^\top + F_\ell F_k^\top$ und Ω^Δ ein reguläres Büschel bilden.

Beweis. (Theorem 9.4) Liege F auf keinem der Kegelschnitte. Seien t, \tilde{t} die beiden gemeinsamen Tangenten. Dann kann jeder der Kegelschnitte als Element der jeweiligen Kreisfamilie mit Mittelpunkt F angesehen werden, also:

$$\mathcal{C}_k \sim t\tilde{t}^\top + \tilde{t}t^\top + \mu_k \mathcal{C}_k F F^\top \mathcal{C}_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Die F gegenüberliegenden Diagonalepunkte sind die Schnittpunkte der jeweiligen Polaren von F , d.h. $D_m \sim \mathcal{C}_k F \times \mathcal{C}_\ell F$ für $\{k, \ell, m\} = \{1, 2, 3\}$.

In allgemeiner Lage ist $(t\tilde{t}^T)[D_m] \neq 0$. Die singulären Kegelschnitte

$$\mathcal{N}_m \sim \mathcal{C}_\ell[D_m]\mathcal{C}_k - \mathcal{C}_k[D_m]\mathcal{C}_\ell \sim \mu_k\mathcal{C}_kFF^T\mathcal{C}_k - \mu_\ell\mathcal{C}_\ell FF^T\mathcal{C}_\ell, \quad \{k, \ell, m\} = \{1, 2, 3\},$$

zerfallen dann in die relevanten Brennpunkte. (Beachte $\mathcal{N}_m[D_m] = 0$.) Offenbar sind die Kegelschnitte N_1, N_2, N_3 linear abhängig. Also bilden die Brennpunkte wieder genau das behauptete vollständige Viereck.

Falls $(t\tilde{t}^T)[D_m] = 0$, also der Diagonalepunkt auf der Tangente liegt, bilden $\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_\ell$ eine Parabel-Familie. Die singulären Kegelschnitte

$$\mathcal{N}_m \sim \mu_k\mathcal{C}_kFF^T\mathcal{C}_k - \mu_\ell\mathcal{C}_\ell FF^T\mathcal{C}_\ell$$

sind Elemente der jeweiligen Büschel, also die jeweils eindeutigen doppelten singulären Elemente. Sie zerfallen wieder in die relevanten Brennpunkte und sind wie im allgemeinen Fall linear abhängig. \boxtimes

Beweis. (Theorem 9.5) Wir argumentieren wie im Beweis von Theorem 9.3 zuvor. Die in die gemeinsamen Tangenten zerfallenden singulären Kegelschnitte sind diesmal direkt gegeben als durch die Diagonallinien ausgewählten Vertreter der dualen Büschel:

$$\mathcal{N}_m^\Delta = \mathcal{C}_{m-1}^{-1}[d_m]\mathcal{C}_{m+1}^{-1} - \mathcal{C}_{m+1}^{-1}[d_m]\mathcal{C}_{m-1}^{-1} \quad (m \bmod 3).$$

Wir benutzen wieder die Brennpunkteigenschaft bezüglich des absoluten Kegelschnitts,

$$\mathcal{C}_m^{-1}[d_k] = \mu_m\Omega^\Delta[d_k], \quad \mathcal{C}_m^{-1}[d_\ell] = \mu_m\Omega^\Delta[d_\ell], \quad \{k, \ell, m\} = \{1, 2, 3\},$$

und erhalten

$$0 = \sum_{m=1}^3 \mu_m\Omega^\Delta[d_{m-1}]\Omega^\Delta[d_{m+1}]\mathcal{N}_m^\Delta \quad (m \bmod 3).$$

Die singulären Kegelschnitte \mathcal{N}_m^Δ , $m = 1, 2, 3$, sind also linear abhängig und ihre absoluten Pole F_m, \tilde{F}_m , $m = 1, 2, 3$, sind die Ecken eines vollständigen Vierseits. \boxtimes

Beweis. (Theorem 9.6) Liege F auf keinem der Kegelschnitte. Seien t, \tilde{t} die beiden gemeinsamen Tangenten. (Wir setzen $t \neq \tilde{t}$ voraus. Außerdem soll F nicht absoluter Pol eines der Kegelschnitte sein.) Dann kann jeder der Kegelschnitte als Element der jeweiligen Kreisfamilie mit Mittelpunkt F angesehen werden, also:

$$\mathcal{C}_k^\Delta \sim FF^T + \mu_k \left(\mathcal{C}_k^\Delta t\tilde{t}^T\mathcal{C}_k^\Delta + \mathcal{C}_k^\Delta \tilde{t}t^T\mathcal{C}_k^\Delta \right), \quad k = 1, 2, 3.$$

Die drei Elemente der dualen Büschel $\langle \mathcal{C}_k^\Delta, \mathcal{C}_\ell^\Delta \rangle^\Delta$, die durch F gehen sind singulär und zerfallen gerade in F und den jeweils gegenüberliegenden Brennpunkt \tilde{F}_m , also

$$F\tilde{F}_m^T + \tilde{F}_mF^T \sim \mathcal{N}_m^\Delta \sim \mathcal{C}_\ell^\Delta[t + \tilde{t}]\mathcal{C}_k^\Delta - \mathcal{C}_k^\Delta[t + \tilde{t}]\mathcal{C}_\ell^\Delta, \quad \{k, \ell, m\} = \{1, 2, 3\}.$$

Einsetzen (und Wahl von Vertretern) ergibt

$$\mathcal{N}_m^\Delta = \mu_{m-1}(t^T \mathcal{C}_{m-1}^\Delta \tilde{t})^2 C_{m+1}^\Delta - \mu_{m+1}(t^T \mathcal{C}_{m+1}^\Delta \tilde{t})^2 C_{m-1}^\Delta \quad (m \bmod 3).$$

Diese singulären Kegelschnitte sind wegen

$$0 = \sum_{m=1}^3 \mu_m (t^T \mathcal{C}_m^\Delta \tilde{t})^2 \mathcal{N}_m^\Delta \quad (m \bmod 3).$$

wieder linear abhängig.

✕

Übung 9.9 *Diskutiere die Gültigkeit der Theoreme für singuläre Kegelschnitte bzw singuläre Lagen.*

A Basiswissen, lineare Algebra

Sei $A = A_\ell^k$ eine $(n \times m)$ Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wir definieren:

- die Transponierte $A^T = A_k^\ell$,
- die (komplex) Konjugierte $\bar{A} = \overline{A_\ell^k}$,
- die Adjungierte $A^* = \bar{A}^T = \overline{A^T} = \overline{A_k^\ell}$,

und für quadratische Matrizen, $n = m$:

- die Determinante $\det A = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{k=1}^n A_{\pi(k)}^k$,
- die Kofaktor-Matrix

$$\text{cof}(A)_\ell^k = \det \begin{bmatrix} A_1^1 & \cdots & A_{\ell-1}^1 & 0 & A_{\ell+1}^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^{k-1} & \cdots & A_{\ell-1}^{k-1} & 0 & A_{\ell+1}^{k-1} & \cdots & A_n^{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_1^{k+1} & \cdots & A_{\ell-1}^{k+1} & 0 & A_{\ell+1}^{k+1} & \cdots & A_n^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_{\ell-1}^n & 0 & A_{\ell+1}^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix},$$

- die Adjunkte $A^\Delta = \text{cof}(A^T) = \text{cof}(A)^T$ (transponierte Kofaktor-Matrix).

Dann ist $AA^\Delta = A^\Delta A = (\det A)\mathcal{I}$ und für $n = 3$ insbesondere

$$6 \det A = \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{\ell mn} A_\ell^i A_m^j A_n^k, \quad 2(A^\Delta)_\ell^k = \varepsilon_{kij} \varepsilon^{\ell mn} A_m^i A_n^j.$$

Wir nennen

- A symmetrisch, falls $A^T = A$,
- A selbstadjungiert, falls $A^* = A$,
- A (i.d.R. reell) orthogonal, falls $A^T = A^{-1}$,
- A unitär, falls $A^* = A^{-1}$,
- A normal, falls $A^*A = AA^*$.

Proposition A.1 *Ist A reell und symmetrisch, so existiert ein reeller orthogonaler Koordinatenwechsel,*

$$O^{-1}AO = O^T A O = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n),$$

der A diagonalisiert. Die Einträge d_ℓ der Diagonalmatrix sind die Eigenwerte von A .

Die reelle Transformation $L = O\tilde{D}$ mit geeigneter Diagonalmatrix \tilde{D} bringt die zugehörige reelle quadratische Form auf ihre Sylvester Normalform:

$$L^T A L = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad d_\ell \in \{0, \pm 1\}.$$

Beweis. Ist A reell und symmetrisch, so sind die Eigenwerte reell. Ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten stimmen jeweils überein (nur triviale Jordan-Blöcke). Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Gram-Schmidt-Orthonormalisierung der Eigenvektoren in den Eigenräumen liefert die orthogonale Transformationsmatrix. \boxtimes

Der Beweis zeigt auch, dass kommutierende symmetrische Matrizen gemeinsam diagonalisiert werden können.

Proposition A.2 *Ist A normal (und komplex), so existiert ein unitärer Koordinatenwechsel,*

$$U^{-1}AU = U^*AU = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n),$$

der A diagonalisiert. Die Einträge d_ℓ der Diagonalmatrix sind die Eigenwerte von A .

Beweis. Die Schur-Zerlegung transformiert eine allgemeine Matrix A auf eine obere Dreiecksmatrix $R = \tilde{U}^{-1}A\tilde{U}$, \tilde{U} unitär. Ist A normal, so auch R . Also ist R diagonal: $R = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. \boxtimes

Proposition A.3 *Ist A komplex symmetrisch, so existiert eine unitäre Matrix U , so dass*

$$U^T AU = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n),$$

mit nichtnegativen reellen Einträge $d_\ell \geq 0$: den Absolutbeträgen der Eigenwerte von A .

Die Transformation $L = U\tilde{D}$ mit geeigneter Diagonalmatrix \tilde{D} bringt die zugehörige komplexe quadratische Form auf ihre kanonische Form:

$$L^T AL = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad d_\ell \in \{0, 1\}.$$

Beweis. Ist A symmetrisch, so ist A^*A selbstadjungiert, also normal. Daher existiert eine unitäre Transformation \tilde{U} auf eine Diagonalmatrix $\tilde{U}^*A^*A\tilde{U} = \hat{D}$. Da A symmetrisch, sind die Eigenwerte von A^*A reell, also \hat{D} reell symmetrisch. Mit A ist auch $\tilde{A} = \tilde{U}^T A \tilde{U}$ symmetrisch, außerdem $\tilde{A}^* \tilde{A} = \hat{D}$ reell. Dies zeigt, dass Realteil $\Re_{\tilde{A}}$ und Imaginärteil $\Im_{\tilde{A}}$ von \tilde{A} kommutieren, also (als symmetrische reelle Matrizen) gemeinsam orthogonal diagonalisiert werden können. Sei O die entsprechende reelle orthogonale Matrix, so dass $O^T \Re_{\tilde{A}} O$ und $O^T \Im_{\tilde{A}} O$ reell diagonal sind. Dann ist $O^T \tilde{U}^T A \tilde{U} O$ diagonal. Durch eine geeignete Diagonalmatrix $\tilde{D} = \text{diag}(\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n)$, $\tilde{d}_\ell = \exp(-\mathbf{i}\frac{1}{2} \arg(O^T \tilde{U}^T A \tilde{U} O)_{\ell\ell})$, können die Einträge auf die nichtnegative reelle Achse gedreht werden, so dass $U = \tilde{U} O \tilde{D}$ die behauptete Transformation darstellt. \boxtimes

Literatur

- [BR04] A. Beutelspacher and U. Rosenbaum. *Projektive Geometrie. Von den Grundlagen bis zu den Anwendungen*. Vieweg, Braunschweig, 2nd edition, 2004.
- [Cox87] H. Coxeter. *Projective geometry*. Springer, New York, 2nd edition, 1987.
- [Hil99] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie. Mit Supplementen von Paul Bernays. Mit Beiträgen von Michael Toepell, Hubert Kiechle, Alexander Kreuzer and Heinrich Wefelscheid. Herausgegeben und mit Anhängen von Michael Toepell*. B.G. Teubner, Stuttgart, 14th edition, 1999 (1899).
- [Kle71] F. Klein. *Das Erlanger Programm. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Hans Wussing.*, volume 253 of *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1974 (1871).
- [Lie99] D.-E. Liebscher. *Einsteins Relativitätstheorie und die Geometrien der Ebene. Illustrationen zum Wechselspiel von Geometrie und Physik*. Teubner, Stuttgart, 1999.
- [Ric11] J. Richter-Gebert. *Perspectives on projective geometry. A guided tour through real and complex geometry*. Springer, Berlin, 2011.
- [Rus05] L. Russo. *Die vergessene Revolution oder die Wiedergeburt des antiken Wissens*. Springer, Berlin, 2005.

Web-Links

www.stefan-liebscher.de: Javascript-Programm zur interaktiven [Visualisierung der reellen projektiven Ebene](#).

www.dierck-e-liebscher.de: Poster, Bilder, Movies zur [Speziellen Relativitätstheorie](#).