

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2016/2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

Abgabe: Mittwoch, 18.01.2017, 17 Uhr

Aufgabe 33: Prüfe folgende Funktionen auf Stetigkeit und gib die Stetigkeitsgebiete an:

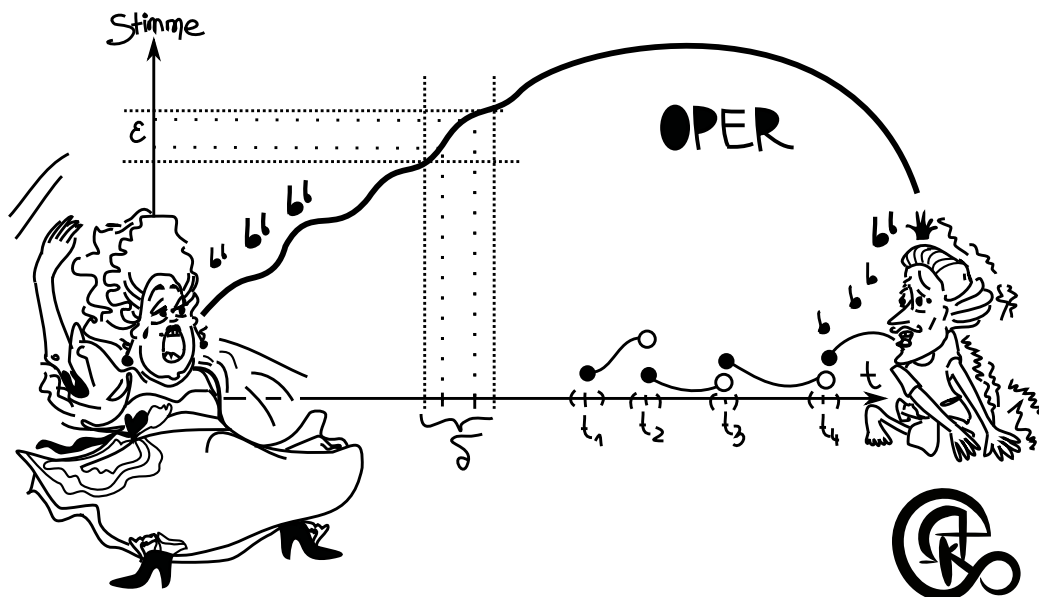
$$(i) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} & \text{falls } x \neq 3 \\ 8 & \text{falls } x = 3 \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} x^{1/n} & \text{falls } x \geq 0 \\ -|x|^{1/n} & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \text{mit festem } n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) f(x) = \begin{cases} x^{-2}(\cos x - 1) & \text{falls } x \neq 0 \\ -1/2 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$$(iv) f(x) = \begin{cases} \left| \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] - \frac{1}{2} \right| & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet die Gauss-Klammer $[x]$ wieder die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x .



Aufgabe 34: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Dies bedeutet, dass der Graph von f unterhalb aller seiner Sehnen verläuft.

Zeige indirekt, dass jede konvexe Funktion stetig ist.

Aufgabe 35: Beweise oder widerlege die Existenz stetiger Funktionen

- (i) $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \cap \mathbb{Q}$;
- (ii) $f : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \rightarrow [0, 1] \cap \mathbb{Q}$;
- (iii) $f : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$;
- (iv) $f : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \{0, 1\}$;
- (v) $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$;

jeweils mit $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$.

Aufgabe 36: Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die *jeden* Wert $y \in \mathbb{R}$

- (i) genau zweimal,
- (ii) genau dreimal,
- (iii) genau 2017mal

annimmt?

Freiwillige Zusatzaufgabe:

- (i) Zeige, dass am 18.01.2017, 17:00 Uhr (Ortszeit Berlin) an zwei Antipodenpunkten des Äquators dieselbe Temperatur herrschen wird.
- (ii) Gib die Stetigkeits- und Unstetigkeitsstellen der Funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ an:

$$f(x) := \begin{cases} 1/q & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \text{ mit teilerfremder Darstellung } x = p/q \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$