Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2016/2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Mittwoch, 25.01.2017, 17 Uhr

Aufgabe 37:

(i) Zeige, dass die Gleichung

$$e^x = \frac{1}{x}$$

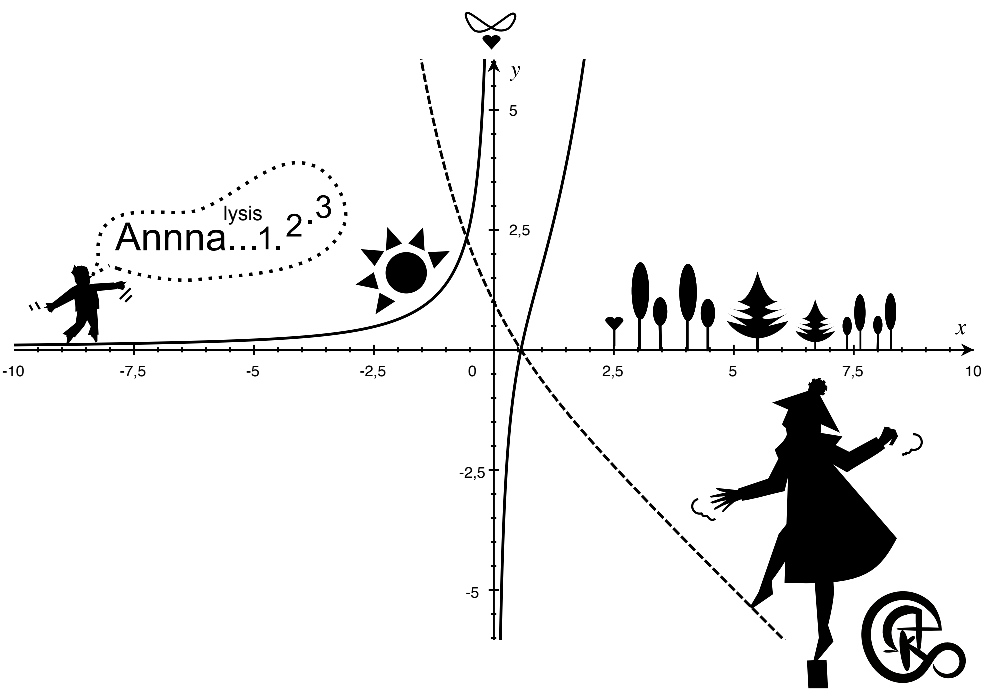
genau eine reelle Lösung x_* besitzt.

(ii) Benutze den Zwischenwertsatz, um x_* mit dem Taschenrechner o.ä. auf zwei Nachkommastellen genau zu berechnen.

(iii) Löse die äquivalente Gleichung

$$x = e^{-x}$$

durch Iteration, etwa mit Startwert $x_0 = 1$.



Aufgabe 38: Seien I, J abgeschlossene, beschränkte Intervalle. Betrachte zwei gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen,

$$\begin{array}{llrcl} f, f_n : I \to J, & \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{BC}(I,\mathbb{R})} & = & 0, \\ g, g_n : J \to \mathbb{R}, & \lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{\mathcal{BC}(J,\mathbb{R})} & = & 0, \end{array}$$

mit stetigen f_n und g_n. Beweise, dass dann auch die Verkettungen $g_n \circ f_n$ gleichmäßig gegen $g \circ f$ konvergieren.

Freiwilliger Zusatz: Finde ein Gegenbeispiel mit unbeschränkten Intervallen I, J.

Aufgabe 39: Welche der folgenden Funktionenfolgen f_n konvergieren punktweise und welche gleichmäßig auf dem Intervall I?

(i) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}, \qquad \text{auf } I = \mathbb{R};$

(ii) $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{für} \quad 0 \le x < 1/n, \\ 2n - n^2x & \text{für} \quad 1/n \le x < 2/n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{auf } I = [0,1];$

(iii) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2}, \qquad \text{auf } I = \mathbb{R}.$

Aufgabe 40:

In der Vorlesung haben wir neuerdings definiert

$$x^\alpha := \exp(\alpha \log x),$$

für reelle α und positive x. Zeige, dass für rationale Exponenten $\alpha = p/q$ die neue mit der alten Definition übereinstimmt: $Q = x^\alpha$ ist die Trennzahl des reellen Dedekindschen Schnittes $(L \,|\, R)$ mit

$$R := \{r > 0 \,|\, r^q > x^p\} \;\text{ und }\; L := \mathbb{R} \backslash R.$$

Freiwillige Zusatzaufgabe: [Abelscher Grenzwertsatz] Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 und $s := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiere.

Zeige: Die durch die Potenzreihe definierte Funktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist bei 1 linksseitig stetig, d.h. es gilt: $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Hinweis: Betrachte zunächst das Produkt $g(x)f(x)$, wobei $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist (geometrische Reihe). Zeige:

$$s - f(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} (s - s_n) x^n \quad \text{für } |x| < 1,$$

wobei $s_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, und folgere hieraus die Behauptung.