Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2016/2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 08.02.2017, 17 Uhr

Aufgabe 45: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem offenen Intervall I differenzierbare Funktion. Beweise oder widerlege, dass dann die (nicht notwendig stetige) Ableitung f' den Zwischenwertsatz erfüllt:

Zu beliebigen Werten $a, b \in I$ und α zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ existiert ein Wert c zwischen a und b, so dass $f'(c) = \alpha$.

Aufgabe 46: Betrachte den Raum $\mathcal{BC}^1(I, \mathbb{R})$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf dem kompakten Intervall $I = [-1, 1]$. Definiere Normen

$$\|f\|_1 = |f'(1)| + \sup_{x \in I} |f(x)|, \qquad \|f\|_2 = |f(1)| + \sup_{x \in I} |f'(x)|.$$

Zeige, dass dies tatsächlich Normen definiert. Bezüglich welcher dieser Normen ist $\mathcal{BC}^1(I, \mathbb{R})$ vollständig?

Aufgabe 47: Bestimme die Ableitungen folgender Funktionen in allen Punkten, in denen sie definiert und differenzierbar sind.

(i) $f(x) = x^3 \mathrm{e}^{-2x}$;

(ii) $f(x) = \log(\log x)$;

(iii) $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$;

(iv) $f(x) = (\exp(x^2))^2$.

Aufgabe 48:

(i) Bestimme durch Anwenden der Additionstheoreme auf den Differenzenquotienten die Ableitung der Sinusfunktion,

$$\cos' x = -\sin x;$$

(ii) Bestimme durch Anwenden der Ketten- und Produktregeln die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 \cos(1/x);$$

(iii) Setze f in $x = 0$ durch $f(0) = 0$ fort und zeige durch Abschätzung des Differenzenquotienten, dass dann die Ableitung in $x = 0$ existiert.

(iv) Zeige, dass $f'(0)$ nicht Grenzwert der Ableitungen $f'(x)$ für $x \to 0$ ist.

Bemerkung: Die Funktion ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar. In $x = 0$ existiert zwar ebenfalls die Ableitung, sie ist dort aber nicht stetig.

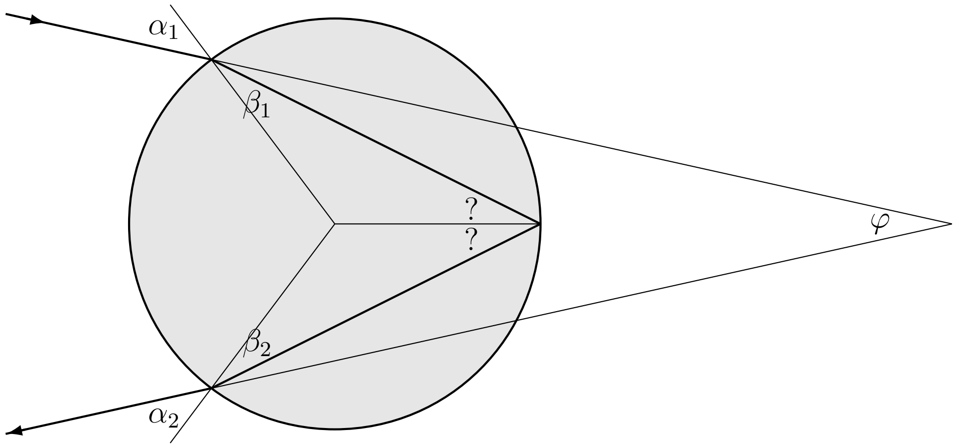
Freiwillige Zusatzaufgabe:

Ein Regenbogen entsteht, wenn Sonnenstrahlen an der Oberfläche eines Regentropfens gebrochen, im Tropfen reflektiert und beim Austritt aus dem Tropfen erneut gebrochen werden, bevor sie das Auge erreichen.

Wir nehmen vereinfachend an, dass Regentropfen einen kreisförmigen Querschnitt haben. Berechne unter Benutzung des Brechungsgesetzes,

$$\frac{\sin \alpha_k}{\sin \beta_k} = n,$$

den Winkel φ zwischen einfallendem und austretendem Strahl in Abhängigkeit des Einfallswinkels α_1. An der Grenze zwischen Luft und Wasser ist $n \approx 4/3$.



Welcher ist der maximale Winkel φ, und was hat dieser mit dem Winkel zu tun, unter dem der Regenbogen am Himmel sichtbar ist?

Begründe, wie sich die Farbfolge des Regenbogens aus der Abhängigkeit der Brechungszahl n von der Wellenlänge des Lichts ergibt. Sichtbares Licht erstreckt sich über Wellenlängen von ca. 380nm (violett) bis 780nm (rot). Die zugehörigen Brechzahlen liegen bei einer Temperatur von 20°C zwischen $1,345$ (violett) und $1,329$ (rot). Welche Breite ergibt sich daraus für den Regenbogen?

Mit viel Glück und guten Augen lässt sich auch ein zweiter Regenbogen beobachten. Wie kann dieser entstehen?