Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2016/2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

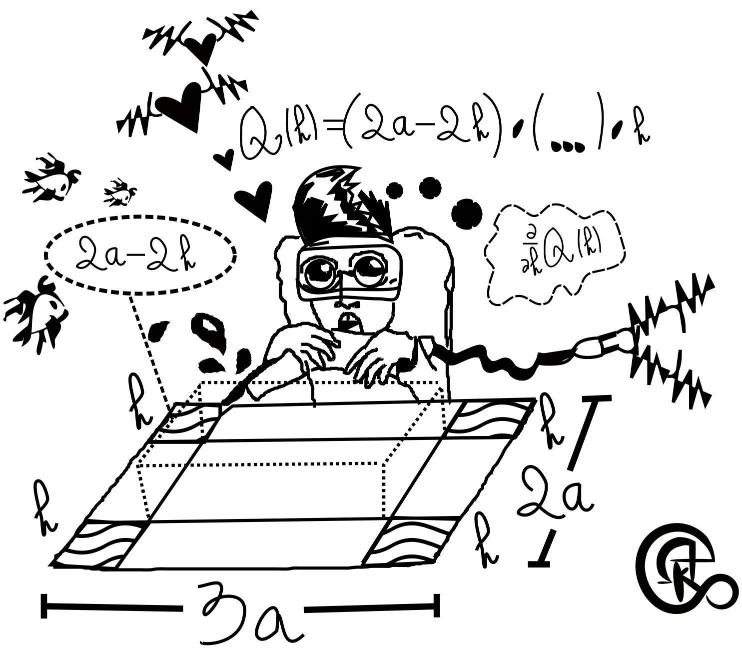
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Freiwillige Ferienaufgaben

Es handelt sich ausschließlich um freiwillige Zusatzaufgaben zum Vorlesungsstoff. Es gibt keine Abgabe oder Korrektur. Eventuell können die Ferienaufgaben aber für reichlich Gesprächsstoff in Euren eigenen Arbeitsgruppen sorgen, die wir ausdrücklich empfehlen. Immer ganz alleine lernen ist doch auf Dauer weniger lustig.

Ferienaufgabe 1: Analyx möchte aus einer rechteckigen Glasplatte mit Kantenlängen $2a$ und $3a$ ein quaderförmiges Aquarium (ohne Deckel) bauen. Dazu schneidet er an den Ecken Quadrate mit Kantenlänge h ab und zerlegt den Rest der Platte in fünf Rechtecke.

Als Tierfreund möchte er seinen Fischen natürlich ein möglichst großes Becken bieten. Wie muss er h wählen, damit das Volumen maximal wird?



Ferienaufgabe 2: Bestimme folgende Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x$;

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$, mit $a > 0$;

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{1/x}$;

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log \cos(ax)}{\log \cos(bx)}$, mit $b \neq 0$.

Ferienaufgabe 3: Wir wollen für $f(x) = x + \sin x \cos x$ und $g(x) = f(x) \exp(-\sin x)$ den Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

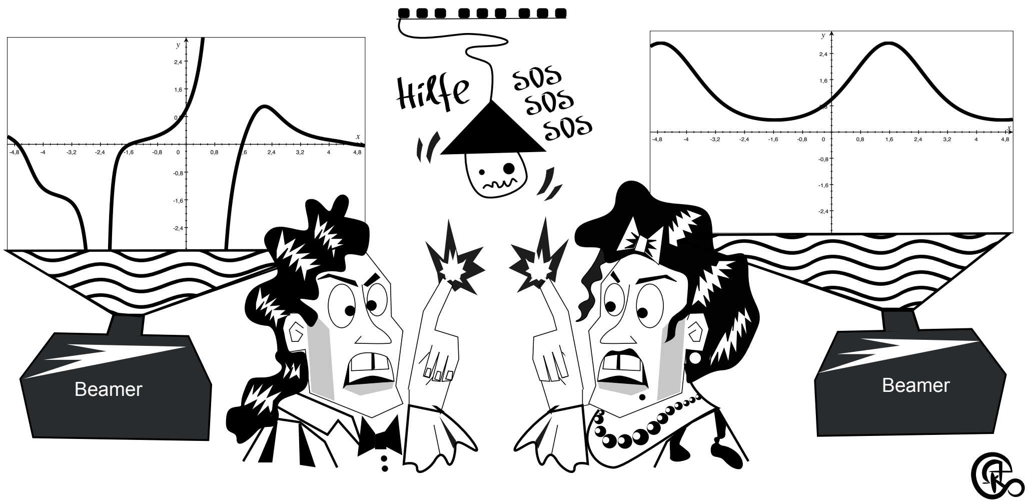
bestimmen. Dazu berechnet Analyx

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2 \cos x}{2 \cos x - x - \sin x \cos x} \exp(\sin x).$$

Offenbar konvergiert die rechte Seite gegen 0, falls $x \to \infty$. Andererseits sagt Annaliese, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \exp(\sin x)$$

für $x \to \infty$ (genauso offenbar) keinen Grenzwert hat. Was ist hier falsch?



Ferienaufgabe 4: Konstruiere eine monoton wachsende, unendlich oft differenzierbare Funktion $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$, für die gilt:

$$\psi(x) = 0, \text{ für alle } x \leq 0 \qquad \text{und} \qquad \psi(x) = 1, \text{ für alle } x \geq 1.$$

Hinweis: Betrachte zum Beispiel die Funktion $\exp(-1/x^2)$.

Ferienaufgabe 5: Welche der folgenden Funktionenfolgen f_n konvergiert gleichmäßig? Bestimme die Grenzfunktion als punktweisen Grenzwert und prüfe auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Konvergieren auch die Ableitungen?

(i) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$, auf dem Intervall $x \in (-1,1)$; bzw. $x \in (-2016/2017, 2016/2017)$;

(ii) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k \cdot x^k}$, auf dem Intervall $x \in [1, \infty)$;

(iii) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, auf dem abgeschlossenen Intervall $|x| \leq C$;

(iv) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$, auf dem Intervall $x \in [0, \infty)$;

(v) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, auf $\mathbb{R}$.

Ferienaufgabe 6: Es sei

$$\varphi(x) := x \tanh x.$$

Betrachte die Funktionenfolge $f_n(x) := \varphi(nx)/n$. Bestimme den punktweisen Limes. Ist die Konvergenz auch gleichmäßig?

Ferienaufgabe 7: Zeige, dass gilt:

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{1}$$

Was ist der Konvergenzradius dieser Reihe? Gilt die Reihenentwicklung auch für komplexe x?

Wie können wir $\log 2$ mit Hilfe von Gleichung (1) approximieren? Wie viele Terme sind notwendig, um $\log 2$ auf drei Nachkommastellen genau zu berechnen?

Ferienaufgabe 8: Zeige mit E. Landaus Definition von π, dass

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + -... = \pi/4.$$

Hinweis: Untersuche Konvergenz und Stetigkeit der arctan-Reihe genau.

Ferienaufgabe 9: Im indischen Mathebuch Tantrasangraha-vyakhya (1530) findet sich die alternierende Reihe

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^3 - 3} - \frac{1}{5^3 - 5} + \frac{1}{7^3 - 7} - + \dots$$

Nach Wikipedia hat Madhava auch folgende sogar geometrisch konvergente alternierende Reihe benutzt:

$$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + - \dots\right)$$

Beide Reihen konvergieren viel schneller als die Reihe für $\pi/4 = \arctan 1$.

(i) Versuche, auch per Internet, einen Beweis für beide "konvergenz-beschleunigten" Darstellungen von π zu finden.

(ii) Madhava hat $\pi = 3.14159265359\dots$ auf 11 Dezimalstellen nach dem Komma bestimmt. Wieviele Terme hätte er in obigen Reihen auswerten müssen? Welche Reihe hat er wohl wirklich benutzt?

Ferienaufgabe 10: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = \sup\{\ g(x)\ \mid g \text{ affin linear mit } g(y) \leq f(y) \text{ für alle } y \in \mathbb{R}\ \}.$$

Hinweis: Eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt affin linear, wenn sie die Gestalt $g(y) = ay + b$ mit reellen Konstanten a, b besitzt.

Ferienaufgabe 11: [Legendre-Fenchel-Dualität] Betrachte Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Definiere das Legendre-Fenchel-Dual $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ von f als

$$f^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \{xy - f(x)\}$$

Weiterhin definiere f^{**} als das Legendre-Fenchel-Dual von f^*.

Zeige:

(i) $f = f^{**} \iff f$ konvex,

(ii) $(f^*)' = 1/f'$.

Ferienaufgabe 12: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls $L > 0$ existiert, so dass für beliebige $x, y \in D$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \ \leq \ L|x - y|.$$

(i) Beweise, dass Lipschitz-stetige Funktionen stetig sind.

(ii) Beweise, dass für beliebige Lipschitz-stetige Funktionen f und g auch deren Summe $s(x) := f(x) + g(x)$ und (punktweises) Maximum $m(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ Lipschitz-stetige Funktionen sind.

(iii) Beweise, dass der gleichmäßige Grenzwert f Lipschitz-stetiger Funktionen f_n ebenfalls Lipschitz-stetig ist.

Ferienaufgabe 13: Bestimme geeignete natürliche Zahlen N_1, N_2, N_3, N_4, so dass folgende Ausdrücke definiert sind. Bestimme dann alle $\alpha \geq 1$, für die die folgenden Reihen konvergieren.

(i) $\displaystyle\sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=N_2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=N_3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^\alpha}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=N_4}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)(\log\log\log n)^\alpha}$

Ferienaufgabe 14: Sei $L(n) = 1 + \log(n)$ und $L(k,n) = L(L(\cdots L(n)\cdots))$ die k-malige Hintereinanderausführung von L. Bestimme dann alle $\alpha \geq 1$, für die die folgenden Reihen konvergieren.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(L(n))^\alpha}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nL(n)(L(2,n))^\alpha}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nL(n)L(2,n)(L(3,n))^\alpha}$

Freiwilliger Zusatz: Konvergiert die „Diagonal"-Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} L(k,n)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2L(2)} + \frac{1}{3L(3)L(2,3)} + \frac{1}{4L(4)L(2,4)L(3,4)} + \cdots$$

Ferienaufgabe 15: Der komplexe Einheitskreis S^1 ist eine Gruppe bezüglich der komplexen Multiplikation $*$. Bestimme alle stetigen Gruppen-Homomorphismen f von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(S^1, *)$. Wie sieht der Kern $f^{-1}(1)$ aus?

Ferienaufgabe 16: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Ferner gelte $f(0) = 0$. Definiere die Sehnensteigung

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Setze g in 0 stetig fort. Welchen Wert hat $g(0)$? Ist g auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?

Ferienaufgabe 17: [Erzeugende Funktionen, Teil 1] Zeige dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Reihenentwicklung gilt:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Was ist der Konvergenzradius?

Bemerkung: Wir nennen die Funktion $(1+x)^\alpha$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \binom{\alpha}{n}$.

Ferienaufgabe 18: [Erzeugende Funktionen, Teil 2] Wir wollen uns noch einmal mit den Fibonacci-Zahlen beschäftigen. Zur Erinnerung: Sie sind definiert als

$$a_1 = a_2 := 1,\ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ziel ist die explizite Darstellung der a_n und der Konvergenzradius der erzeugenden Funktion. Gehe dazu in folgenden Schritten vor:

(i) Die Fibonacci-Folge ist für $n \geq 2$ streng monoton wachsend. Außerdem gilt für alle n: $a_{n+1}/a_n \leq 2$.

(ii) $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$ konvergiert mindestens für $|x| < 1/2$.

(iii) Für $|x| < 1/2$ ist $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$. Wir können daraus schließen, dass die erzeugende Funktion folgende Form hat:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

(iv) Bestimme die Nullstellen x_1, x_2 des Nenner-Polynoms $g(x) = x^2 + x - 1$ und zeige, dass wir $f(x)$ wie folgt umschreiben können:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x - x_2} - \frac{1}{x - x_1} \right).$$

(v) Schreibe $f(x)$ als Potenzreihe (Hinweis: die geometrische Reihe ist hier nützlich):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}} \right) x^n. \tag{2}$$

(vi) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

(vii) Zeige:

$$\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1} = (-1 + \sqrt{5})/2.$$

Diese Zahl nennt man auch den goldenen Schnitt.

(viii) Zeige, dass es sich beim Grenzwert aus (vii) um den Konvergenzradius von 2 handelt.

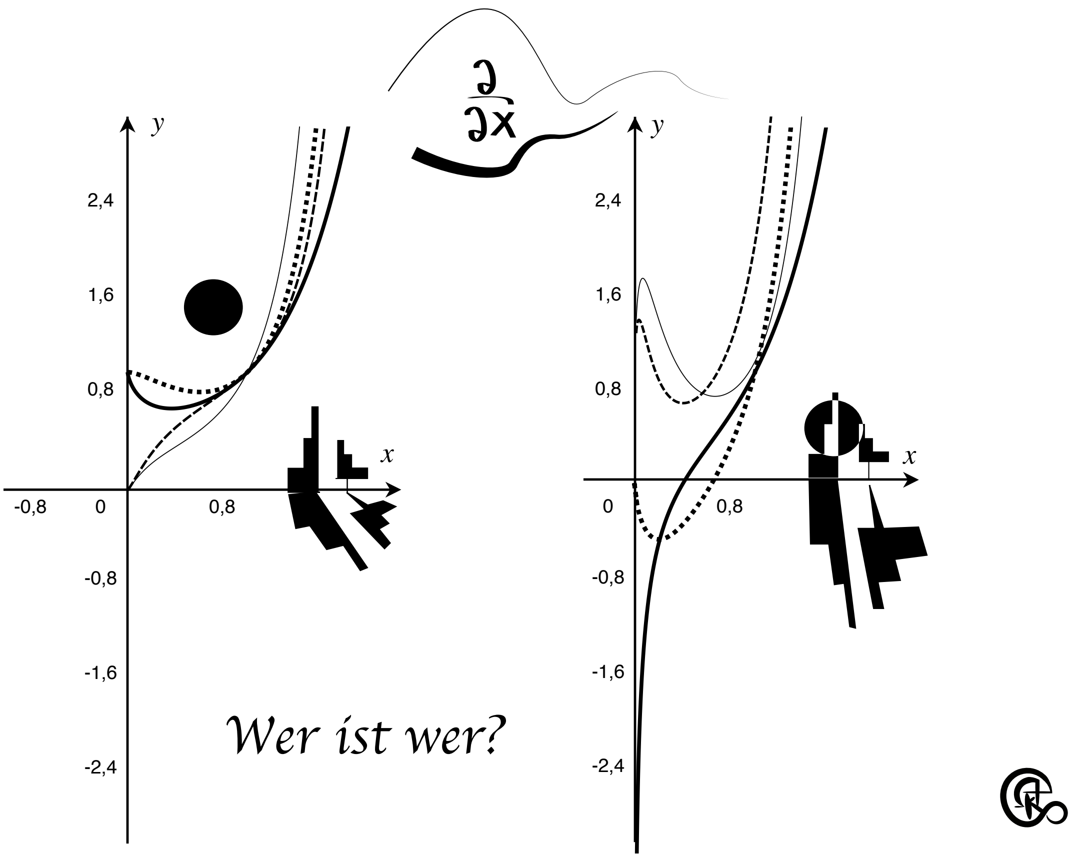
Ferienaufgabe 19: Bestimme die Ableitungen folgender Funktionen $f(x)$, $x > 0$.

(i) $f(x) = x^x$;

(ii) $f(x) = (x^x)^x$;

(iii) $f(x) = x^{(x^x)}$;

(iv) $f(x) = x^{(x+x^x)}$.



Ferienaufgabe 20: Es sei $f : J \to \mathbb{R}$ auf dem offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion. Weiter sei

$$0 = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a), \qquad 0 \neq f^{(k)}(a)$$

an einer Stelle $a \in J$. Für welche k hat f an der Stelle a ein lokales Extremum?

Ferienaufgabe 21: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei k-mal stetig differenzierbare Funktionen. Zeige induktiv die Leibniz-Regel

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} f^{(\ell)} g^{(k-\ell)}$$

für die k-ten Ableitung der Produktfunktion $f \cdot g$.

Ferienaufgabe 22: [Verallgemeinerung der Kettenregel, Teil 1] Betrachte die Verkettung von n Funktionen,

$$f = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1.$$

Zeige induktiv, dass für die Ableitung gilt:

$$f'(x) = f_n'\big(f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1(x)\big) \cdots f_2'\big(f_1(x)\big) \cdots f_1'(x)$$

Ferienaufgabe 23: [Verallgemeinerung der Kettenregel, Teil 2] Es seien f und g zwei k-mal differenzierbare Funktionen und $F := g \circ f$.

$$F^{(n)}(x) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n) \in T_n} \frac{n!}{k_1! \cdot \ \cdots \ \cdot k_n!} g^{(k_1+\cdots+k_n)}(f(x)) \prod_{\substack{m=1 \\ k_m \geq 1}}^{n} \left(\frac{1}{m!} f^{(m)}(x) \right)^{k_m} .$$

Hierbei bezeichnet T_n die Menge aller n-Tupel für die gilt: $\sum_{j=1}^{n} j k_j = n$. Dabei sind alle $k_j \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \ldots, n$.

Ferienaufgabe 24:

(i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in x_0. Zeige, dass dann für beliebige Nullfolgen positiver Zahlen $(\underline{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\overline{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$f'(x_0) \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \overline{h}_n) - f(x_0 - \underline{h}_n)}{\overline{h}_n + \underline{h}_n}$$

Bemerkung: Es wird keine Differenzierbarkeit in anderen Punkten vorausgesetzt.

(ii) Betrachte die Zacken-Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|,$$

wobei die Gauss-Klammer $[y]$ wieder die größte ganze Zahl kleiner oder gleich y bezeichnet. Die Funktion g ist periodisch, $g(x+1) = g(x)$, sowie auf $\mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ differenzierbar. Bilde nun die Summe

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} g(2^k x).$$

Zeige, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **überall stetig aber nirgends differenzierbar** ist.

Hinweis: Zu gegebenem x_0 betrachte die Folgen $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\underline{x}_n \ := \ 2^{-n}[2^n x_0], \qquad \overline{x}_n = \underline{x}_n + 2^{-n}.$$

Insbesondere gilt $\underline{x}_n \leq x_0 \leq \overline{x}_n$. Zeige dann, dass die Differenzenquotienten

$$\frac{g(2^k \overline{x}_n) - g(2^k \underline{x}_n)}{2^k(\overline{x}_n - \underline{x}_n)}$$

nur Werte ± 1 für $k < n$ bzw. 0 für $k \geq n$ annehmen. Zeige nun, dass die Annahme der Differenzierbarkeit von f in x_0 im Widerspruch zu (i) steht.

Bemerkung: Weierstraß (1872) war der erste, der zeigte, dass es Funktionen gibt, die überall stetig aber nirgends differenzierbar sind. Er führte den Beweis für Funktionen der Form $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b^k \cos(a^k x)$ mit $b < 1$ und $ab > 1 + 3\pi/2$ durch.

Ferienaufgabe 25: [Pendelgleichung] Laut Newton erfüllt die Auslenkung $u(t)$ des (Hookeschen Feder-) Pendels zur Zeit t die Differentialgleichung

$$u''(t) = -u(t).$$

Bestimme alle Lösungen $u(t)$, die Potenzreihen in t sind. Was ist ihr Konvergenzradius? Wie hängt diese allgemeine Lösung mit sin und cos zusammen?

Ferienaufgabe 26: [Besselsche Differentialgleichung] Die Besselsche Differentialgleichung ist gegeben duch

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)u(x) = 0.$$

Wir wollen diese Gleichung durch den Ansatz als Potenzreihe,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

für $x > 0$ lösen. Wir fordern $a_0 = u(0) = 0$. Setze dazu formal die Potenzreihe in die Besselsche Differentialgleichung ein und führe einen Koeffizientenvergleich durch.

Überprüfe, dass $u(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und die Besselsche Differentialgleichung löst.

Bemerkung: Die Besselsche Differentialgleichung und ihre Lösungen, die sogenannten Bessel-Funktionen, spielen in der Physik eine wichtige Rolle: Die Bessel-Funktionen treten zum Beispiel bei den Schwingungen einer Orgelpfeife auf, der Ausbreitung von Wasserwellen, Schwingungen kreisförmiger Membranen (Trommel, Pauke) oder auch in der Elektrostatik auf.


Schöne Ferien
Analysis I
#1.