

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2016/2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

Abgabe: Mittwoch, 16.11.2016, 17 Uhr

Aufgabe 13: Beweise oder widerlege für beschränkte Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$

- (i) $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$;
- (ii) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$;
- (iii) $\sup(A \setminus B) = \sup A - \sup B$;
- (iv) $\sup(A \setminus B) = \sup A - \inf B$;
- (v) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, wobei $A + B := \{a + b; a \in A, b \in B\}$;
- (vi) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$, wobei $A \cdot B := \{a \cdot b; a \in A, b \in B\}$.

Aufgabe 14: Zu gegebenen Mengen A, B betrachte die Menge

$$F(A, B) := \{f : A \rightarrow B\}$$

der Abbildungen von A nach B . Bestimme für jede der 16 möglichen Wahlen von A und B aus der Liste

$$\{0\}, \quad \{0, 1, 2\}, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{R},$$

ob $F(A, B)$ endlich, abzählbar unendlich, oder überabzählbar ist.

Aufgabe 15: Zeige, dass zwei Teilmengen $L, R \subset \mathbb{R}$ genau dann ein Dedekindscher Schnitt sind, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $L \cup R = \mathbb{R}$
- (ii) $\sup L = \inf R$
- (iii) $L \cap R = \emptyset$, $L \neq \emptyset$, $R \neq \emptyset$



Aufgabe 16: Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend, d.h. $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ für alle reellen x, y . Dazu gebe es zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f(a) > a$, sowie $f(b) < b$.

Zeige, dass f mindestens einen Fixpunkt besitzt. Ein Fixpunkt von f ist ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = x$ gilt.

Freiwillige Zusatzaufgabe: Annaliese verklebt ebene achsenparallele Quadrate so, dass jedes neue Quadrat genau passend an den (unteren, linken, oberen, rechten) Rand der bisherigen Figur anschließt. Die Ränder werden also zyklisch im Uhrzeigersinn durchlaufen. Das erste Quadrat hat Seitenlänge 1. Wie groß ist das n-te Quadrat?

(Angeblich soll Salvador Dali diese Konstruktion in seinem Abendmahl (1955) verwendet haben: <https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/originals/bc/44/dd/bc44dd0e3ba62a1cc472cb9a5d13276e.jpg>)