Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2016/2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Mittwoch, 23.11.2016, 17 Uhr

Aufgabe 17: Beweise oder widerlege: Jede Folge reeller Zahlen enthält eine monotone Teilfolge.

Aufgabe 18: [Intervallschachtelung] Gegeben seien abgeschlossene Intervalle reeller Zahlen,

$$I_n = [a_n, b_n], \qquad a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Freiwilliger Zusatz: Sei $b_n - a_n < 1/n$. Zeige, dass obiger Durchschnitt genau eine Zahl enthält.

Aufgabe 19: Bestimme alle komplexen Zahlen z und skizziere die Lösungsmengen für die gilt

(i) $\operatorname{Im}(\bar{z}) > \frac{1}{2}$;

(ii) $\operatorname{Re}(z^2) < 0$;

(iii) $\left|\dfrac{z+1}{z-\mathrm{i}}\right| \leq 1 \leq \left|\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right|$;

(iv) $\operatorname{Im}\left(\mathrm{i}\dfrac{1+z}{1-z}\right) > 0$.

Freiwilliger Zusatz:

(v) $\operatorname{Re}(\bar{z}^{-1}) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 20: Betrachte die Abbildung

$$I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}\,,\ I(z) := 1/\bar{z}$$

(i) Zeige, dass I die Inversion („Spiegelung“) am Einheitskreis ist: der Punkt $A \neq 0$ wird abgebildet auf denjenigen Punkt A' auf dem Strahl vom Ursprung O in Richtung A, für den das Produkt der Streckenlängen OA und OA' gleich 1 ist.

(ii) Bestimme die Menge der Fixpunkte $I(z) = z$ von I und beschreibe diese Menge geometrisch.

(iii) Beweise, dass I eine Involution ist, d.h. $I(I(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(iv) Präzisiere und beweise: I bildet Geraden und Kreise auf Kreise und Geraden ab.

Freiwillige Zusatzaufgabe: Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ mit $z^n - 1 = 0$. Zeige:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$$

und interpretiere diese Gleichung geometrisch.
Tipp: Denke an ein gleichseitiges $n-$Eck.