Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2016/2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Mittwoch, 30.11.2016, 17 Uhr

Aufgabe 21: Beweise, dass jede konvergente Folge das Cauchy-Kriterium erfüllt.

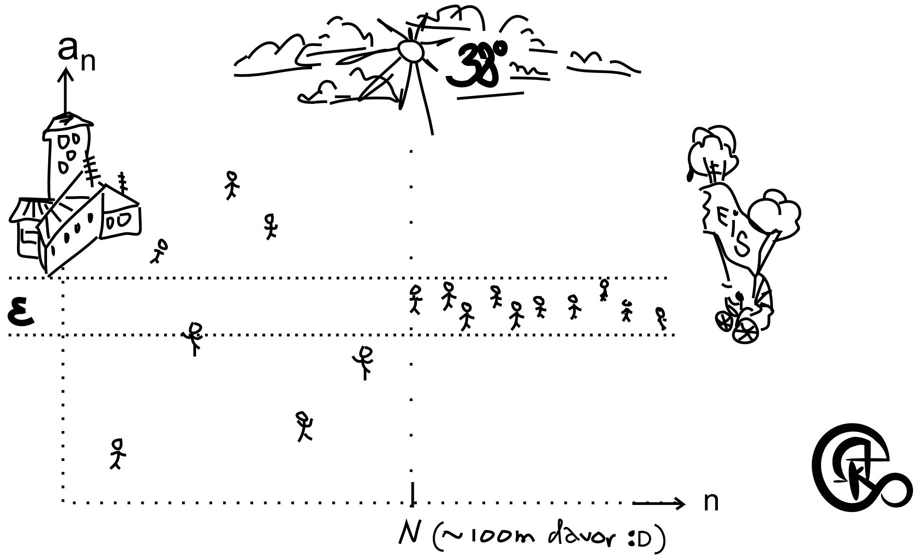
Aufgabe 22: Bestimme alle Häufungswerte bzw. Grenzwerte folgender Zahlenfolgen x_n für $n \to \infty$.

(i) $x_n = \dfrac{5n^2 + \sqrt{n} + 1}{7n^2 - 13n - 3} \in \mathbb{R}$;

(ii) $x_n = \mathrm{i}^n + n^{-2016} \in \mathbb{C}$;

(iii) $x_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}} \in \mathbb{R}$;

(iv) $x_n = \dfrac{(-2016)^n}{n!} \in \mathbb{R}$.



Aufgabe 23: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Ferner seien die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{11k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent. Zeige, dass dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 24: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

die Folge der arithmetischen Mittelwerte.

(i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Zeige, dass dann auch $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Was ist der Grenzwert?

(ii) Finde eine divergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Mittelwerte μ_n trotzdem konvergieren.

Freiwillige Zusatzaufgabe:

(i) Finde je ein Beispiel zweier reellwertiger Folgen x_n und y_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, für deren Produkt gilt:

  (a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$;

  (b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n$ existiert nicht, aber $|x_n y_n|$ ist beschränkt.

(ii) Beweise oder widerlege die folgende Aussage.
Die Folge der $n_k,\ k \in \mathbb{N}$ sei eine Permutation von $\mathbb{N}$, das heißt die Abbildung $k \mapsto n_k$ von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ sei bijektiv. Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \infty.$$