Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2016/2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 07.12.2016, 17 Uhr

Aufgabe 25: Sei x_n irgendeine Fibonaccifolge natürlicher Zahlen, d.h. $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ mit irgendwelchen positiven ganzen Zahlen x_0 und x_1 als Startwerten.

(i) Zeige dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/x_{n+1}$ existiert und bestimme den Grenzwert.

(ii) Wie hängt der Grenzwert von den Anfangswerten ab?

Aufgabe 26: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte, reellwertige Folgen. Zeige, dass

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n &\leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \\
&\leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n
\end{aligned}$$

gilt. Finde ein Beispiel, bei dem überall Gleichheit gilt. Finde ein Beispiel, bei dem überall die strikte Ungleichung „<“ gilt.

Freiwillige Zusätze: Finde zu jeder der 4 Ungleichungen je ein Beispiel, so dass Gleichheit gilt und beide Folgen jeweils 2 Häufungswerte besitzen. Lasse unbeschränkte Folgen und uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$ zu. Gilt die Ungleichungskette dann noch immer?

Aufgabe 27: Bestimme alle Häufungswerte oder die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen x_n für $n \to \infty$.

(i) $x_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{p} a_k n^k}{\sum_{k=0}^{p} b_k n^k}$, für feste $(a_k, b_k)_{0\leq k\leq p}$ mit $b_p \neq 0$;

(ii) $x_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$.

(iii) $x_n = q^n/n^p$ für beliebige feste $q > 1,\ p \in \mathbb{N}$.

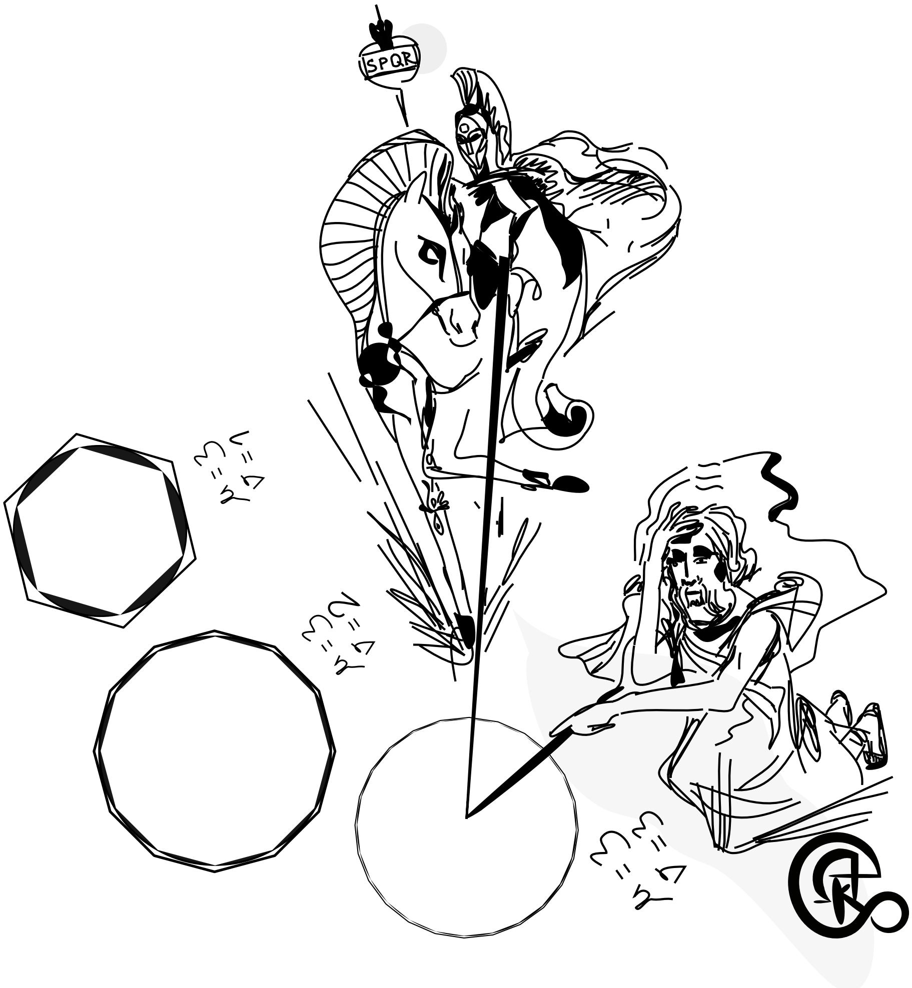
(iv) $x_n = n^p q^n$ für beliebige feste $0 < q < 1,\ p \in \mathbb{N}$

(v) $x_n = \frac{(1+\mathrm{i})}{\sqrt{2}}^n \in \mathbb{C}$.

(vi) x_n ist die Zahl der (positiven ganzzahligen) Teiler von n.

Aufgabe 28: In der Vorlesung haben wir den Umfang 2π des Einheitskreises durch den Umfang regulärer ein- bzw. um-beschriebener N-Ecke angenähert, mit $N = m2^n$ und $n \to \infty$. Auf Archimedes geht die Wahl $m = 3$ und $n = 5$ zurück. Welche numerischen Näherungen ergeben sich für 2π? Welche Dezimalstellen des Ergebnisses sind sicher korrekt?

Hinweis: Benutze Schulmathematik, z.B. $\cos\phi = -1 + 2\cos^2(\phi/2)$.



Freiwillige Zusatzaufgabe: Nach zehnjähriger Suche ritzt Hamilton folgende Relationen für die Multiplikation gewisser Elemente i, j, k der Quaternionen $\mathbb{H}$ in eine Dubliner Brücke:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Finde komplexe 2×2-Matrizen $M_i, M_j, M_k \in \mathbb{H}$, welche diese Relationen erfüllen.