

Übungen zur Vorlesung
Analysis I
WiSe 2016/2017
Bernold Fiedler, Isabelle Schneider
<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>
Abgabe: Mittwoch, 14.12.2016, 17 Uhr

Aufgabe 29: Berechne den Kettenbruch

$$a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \dots}}}}$$

für alle natürliche Zahlen a , d.h. den Grenzwert

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

mit $a_1 = a$ und $a_{n+1} = p_n/q_n$. Gibt es eine natürliche Zahl a , für die dieser Kettenbruch rational wird?

Aufgabe 30: Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz. Berechne ggf. die Grenzwerte.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1} \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+1} \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} \quad (iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^n}$$

Freiwilliger Zusatz:

$$(v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

Aufgabe 31: Eine neugierige, unsterbliche Schnecke sitzt am festgebundenen Ende eines zunächst einen Kilometer langen, beliebig dehnbaren Gummiseils. Das andere Ende hält ein ängstlicher, aber gleichfalls unsterblicher Matheprof. Jede Nacht kriecht die Schnecke auf dem Seil einen Meter auf den Prof zu, der in seiner Panik das Seil jeden Tag um einen Kilometer dehnt.

Erreicht die Schnecke den Prof?

Freiwilliger Zusatz: Falls ja: bei welcher Länge des Seils? Falls nein, wann ist der Abstand zwischen beiden größer als der Abstand von der Erde zum Mond Schätze so gut Du kannst.

Aufgabe 32: Betrachte die alternierende harmonische Reihe

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

die konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

- (i) Gib eine divergente Umordnung der Reihe an.
- (ii) Gib eine Umordnung der Reihe an, die gegen 2016 konvergiert.

Freiwilliger Zusatz:

- (iii) Zeige, dass die Umordnung, bei der sich stets ein positives und 2 negative Glieder abwechseln, genau den halben Wert der ursprünglichen Reihe hat:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{s}{2}.$$