Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2016/2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Mittwoch, 11.01.2017, 17 Uhr

Weihnachtsaufgaben

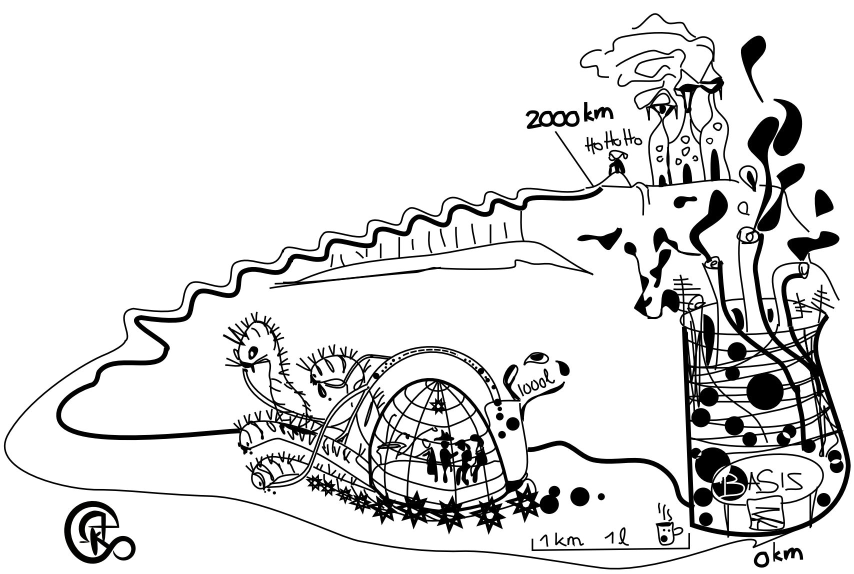
Es handelt sich ausschließlich um freiwillige Zusatzaufgaben, die zusätzliche oder fehlende Extrapunkte einbringen können. Im Tutorium werden nur versuchte Lösungen besprochen!

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!

Weihnachtsaufgabe 1: Eine Expedition macht sich zum Nordpol auf, um den Weihnachtsmann zu besuchen. Ihr einziges Raupenfahrzeug verbraucht einen Liter Glühwein pro Kilometer und besitzt einen Tank, der genau 1000 Liter Glühwein fasst. Das Basislager befindet sich 2000 Kilometer vom Nordpol entfernt und verfügt über unbegrenzte Glühweinvorräte. Unterwegs kann die Expedition beliebig große Vorratsdepots anlegen, der Transport von Glühwein ist aber ausschließlich im Tank des Raupenfahrzeugs möglich. Wieviel Glühwein wird (mindestens) benötigt, um vom Basislager zum Nordpol zu gelangen?

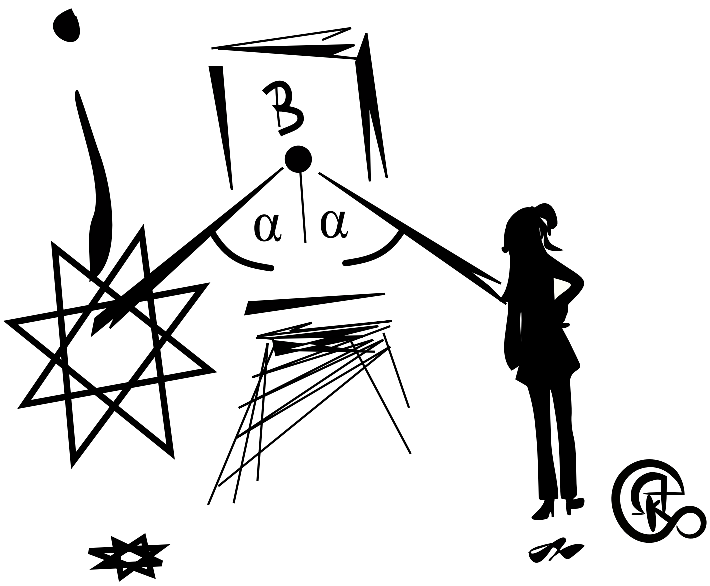
Hinweis: Für den Rückweg wird auf den ebenfalls unbegrenzten Glühweinvorrat des Weihnachtsmanns vertraut.

Zusatz: Wie weit kann die Expedition mit 1000, 2000, …, $n \cdot 1000$ Litern Glühwein höchstens kommen?



Weihnachtsaufgabe 2: Annaliese (A) sieht den Weihnachtsstern (S) im Spiegel und wundert sich. In der Schule hat sie gelernt, dass der Lichtstrahl von S in einem Punkt B des ebenen Spiegels so reflektiert wird, dass die Strahlen SB und BA gleiche Winkel mit der Senkrechten zum Spiegel bilden. An der Uni hat sie von Fermat (1601-1665) gehört, der behauptet hat, dass B der Punkt des Spiegels ist, für den der gesamte Lichtweg (genauer: seine Zeitdauer), von S nach B und dann von B nach A, am kürzesten ist. Stimmen die beiden Behauptungen überein?

Hinweis: Im Internet findet Annaliese zum Fermatschen Prinzip ein sinnloses youtube Video (`https://www.youtube.com/watch?v=_5OzmvJ5oOI`), das viel "demonstriert" und nichts erklärt, sowie mindestens einen umständlichen Beweis durch Differentialrechnung, den sie noch gar nicht versteht (`https://de.wikipedia.org/wiki/Fermatsches_Prinzip`).



Weihnachtsaufgabe 3: In der Vorlesung haben wir für reelle x die drei Gleichungen gezeigt:

$$1 = |\exp(ix)|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Beweise oder widerlege jede einzelne der drei Gleichungen, für komplexe x.

Weihnachtsaufgabe 4: Sei n eine feste natürliche Zahl und

$$s(n) := \sum_{k=1}^{\infty} [n/k].$$

Dabei bedeutet $[x]$ die ganzzahlige floor-Funktion, wie immer. Beweise oder widerlege: die Zahlen $s(n)$ und $[\sqrt{n}]$ sind, abhängig von n, jeweils entweder beide gerade oder beide ungerade.

Weihnachtsaufgabe 5: Beweise, dass eine reellwertige Folge genau dann beschränkt ist, wenn jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge enthält.

Hinweis: Uneigentliche Konvergenz nach $\pm\infty$ zählt hier nicht als Konvergenz.

Weihnachtsaufgabe 6: Beweise den Satz von Bolzano-Weierstraß mit Hilfe von Intervallschachtelung.

Weihnachtsaufgabe 7: Zeige, dass für jede Folge a_n positiver reeller Zahlen die Ungleichungskette

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \;\leq\; \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \;\leq\; \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

gilt. Finde ein Beispiel, so dass überall Ungleichheit gilt.

Weihnachtsaufgabe 8: Annaliese und Annalyx diskutieren über das Cauchykriterium für Folgen x_n. Da bei ihrem Smartphone der Akku leer ist, müssen sie selber nachdenken. Dabei können sie sich darauf einigen, dass folgendes gelten muss:

$$x_n \text{ ist eine Cauchyfolge } :\Leftrightarrow \forall (*)\ \exists N \in \mathbb{N}\text{ , so dass für } (**) \text{ gilt: } |x_n - x_m| \leq (***)$$

Beide wollen allerdings unterschiedliche Ausdrücke in $(*)$, $(**)$ und $(***)$ einsetzen:

(i) Annaliese würde gerne in $(*)$ $\bar{N} \in \mathbb{N}$, in $(***)$ $1/\bar{N}$ und in $(**)$ $\forall n,\, m \geq N$ einsetzen.

(ii) Annalyx hingegen möchte in $(*)$ $\epsilon > 0$, in $(***)$ ϵ und in $(**)$ $\forall n,\, m := n+1 \geq N$ einsetzen.

Wer hat recht: Annaliese, Annalyx, beide oder keiner von beiden?

Weihnachtsaufgabe 9: Prüfe, ob folgende Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\beta > 0$ konvergieren:

(i) $a_n = \dfrac{1}{(5+(-1)^n)^n}$;

(ii) $a_n = (\sqrt[n]{\beta} - 1)^n$;

(iii) $a_n = \dfrac{\beta^{2n}}{(1+\beta^2)^{n-1}}$;

(iv) $a_n = n^{-(1+\frac{1}{n})}$;

(v) $a_n = \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Weihnachtsaufgabe 10: Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\, x^n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n}\, x^n$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\, x^n$

Weihnachtsaufgabe 11: Beweise die folgende Summenformel für reelle x:

$$\sum_{n=0}^{N} \sin(nx) \;=\; \frac{\sin(Nx/2)\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \quad \text{falls } \sin(x/2) \neq 0.$$

Weihnachtsaufgabe 12: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\binom{\alpha}{k} := \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)/k!, \qquad \text{außerdem} \qquad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

absolut konvergiert, falls $|x| < 1$. Was passiert für $x = -1$ und $\alpha < 0$ bzw. $\alpha > 0$?

Freiwilliger Zusatz: Definiere $(1+x)^\alpha := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, für $|x| < 1$, und zeige, dass dann $(1+x)^\alpha (1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}$.

Weihnachtsaufgabe 13: Prüfe die Folgen a_n auf Konvergenz und bestimme ggf. ihre Grenzwerte:

(i) $a_n = 10^{-n}(1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots + \overbrace{111\cdots1}^{n \text{ Einsen}});$

(ii) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n;$

(iii) $a_{n+1} = \dfrac{2 + a_n}{1 + a_n}$, mit $a_1 = 1$.

Weihnachtsaufgabe 14: Annaliese spielt Spider-Woman. Zu gegebener Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ konstruiert sie ihr Netz auf folgende Weise:

(i) Zeichne den Graphen von f, d.h. die Kurve $\{(x,y)\ ;\ y = f(x)\}$

(ii) Zeichne den an der Winkelhalbierenden $\{x = y\}$ gespiegelten Graphen.

(iii) Starte bei einem beliebigen Punkt $(x_0, 0)$.

(iv) Ziehe eine vertikale Linie vom letzten Punkt zum Graphen von f.

(v) Ziehe eine horizontale Linie vom letzten Punkt zum gespiegelten Graphen.

(vi) Fahre bei (iv) fort.

Annalyx, der in der Vorlesung aufgepasst hat, schaut sich das an und schüttelt verzweifelt den Kopf.

(i) Zeichne Annalieses „Spinnennetz“ für $f(x) = \lambda x(1-x)$ und selbtgewählte Werte λ.

(ii) Begründe, dass die Konstruktion für allgemeines f beliebig lange fortgesetzt werden kann.

(iii) Welche Folge (x_n, y_n) von Punkten ergibt sich für gegebenen Anfangswert $(x_0, 0)$? Gibt es eine Rekursionsgleichung? Gibt es eine explizite Formel?

Freiwilliger Zusatz:

(iv) Was bedeuten Schnittpunkte des Graphen von f und seines Spiegelbildes?

Weihnachtsaufgabe 15: Beweise oder widerlege für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen:

(i) Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$;

(ii) Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ konvergent, so auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

(iii) Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ konvergent, so auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$;

(iv) Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent, so auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$.

Weihnachtsaufgabe 16: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Ferner gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2 < \infty.$$

Zeige, dass dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ konvergiert. Konvergiert die Reihe absolut?

Weihnachtsaufgabe 17: [Farey-Sequenzen] Die Mediante zweier Brüche ist durch folgende „Additionsvorschrift“ definiert

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \longmapsto \frac{a+c}{b+d}.$$

Beachte, dass die Darstellung rationaler Zahlen als Bruch nicht eindeutig ist. Die Mediante wird zu einer Funktion auf den Paaren positiver, rationaler Zahlen, wenn als Argumente nur gekürzte Brüche verwendet werden.

Die Farey-Sequenzen definieren sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{1}\right) \\
F_2 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{1}\right) \\
F_3 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{1}\right) \\
F_4 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{1}\right) \\
F_5 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{1}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Allgemein ergibt sich die Sequenz F_{n+1} aus der Sequenz F_n indem überall

$$(*) \qquad \ldots, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots \qquad \text{durch} \qquad \ldots, \frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}, \ldots$$

ersetzt wird, sofern $b + d \leq n + 1$ ist. Die Nenner der Sequenz F_n sind also höchstens n.

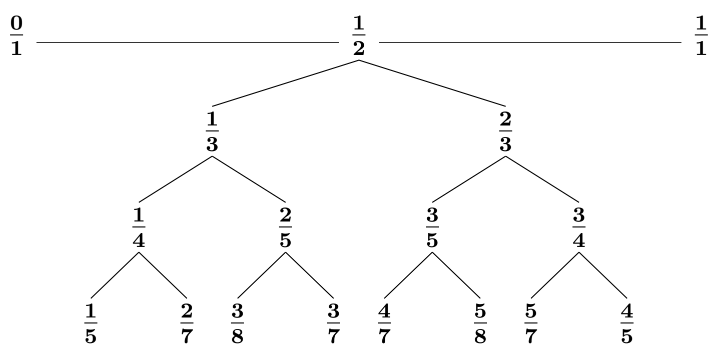
(i) Zeige, dass die Elemente jeder Farey-Sequenz der Größe nach geordnet sind.

(ii) Zeige, dass für benachbarte Elemente $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ von F_n stets gilt: $bc - ad = 1$.

(iii) Zeige mit (ii), dass alle durch $(*)$ erzeugten Brüche automatisch gekürzt sind.

Weihnachtsaufgabe 18: Zeige, dass die zuvor definierte Farey-Sequenz F_n alle gekürzten Brüche mit Nenner kleiner oder gleich n enthält. *Hinweis:* Betrachte dazu einen gekürzten Bruch $\frac{m}{n}$ und die beiden Elemente $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ der Sequenz F_{n-1}, zwischen denen $\frac{m}{n}$ liegt. Zeige dann, dass $n = b + d$ und $m = a + c$.

Die Konstruktion kann auch als Farey-Baum dargestellt werden und liefert ein (bijektive) Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$.



Was sind der kleinste und größte Nenner jeder Zeile?

Weihnachtsaufgabe 19: Ein punktförmiger Mathematik-Professor jagt leider eine ebenfalls punktförmige Mathematik-Studentin in einem kreisrunden Hörsaal $H = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ ohne Hindernisse (Tische, Stühle, Bananenschalen,...). Beide können sich mit derselben Maximalgeschwindigkeit bewegen.

Kann der Professor die Studentin vor Beginn der nächsten Vorlesung erreichen oder gibt es für die (kluge) Studentin eine Strategie, das zu verhindern?