Kernfragen zur Analysis

III. Stetigkeit

1. Wann heißt eine Funktion f in einem Punkt x_0 stetig? Welche äquivalente Definitionen der Stetigkeit gibt es (wenigstens drei verschiedene)?

2. Wann heißt eine Funktion f auf einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ bzw. $D \subseteq \mathbb{C}$ stetig?

3. Sei $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \subset \mathbb{R}$ eine endliche Menge reeller Zahlen. Gib eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die auf $D = \mathbb{R} \setminus U$ stetig, auf U aber unstetig ist.

4. Gib eine Fuktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die nirgends stetig ist.

5. Wie lautet der Zwischenwertsatz?

6. Warum hat jede durch eine stetige Funktion $g : [0,1] \to [0,1]$ gegebene Iteration $x_{n+1} = g(x_n)$ (mindestens) einen Fixpunkt?

7. Wie lässt sich unter Benutzung des Zwischenwertsatzes zeigen, dass die Gleichung $\exp x = -x$ eine reelle Lösung besitzt?

8. Wann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, gleichmäßig stetig? Unter welcher (hinreichenden) Bedingung sind stetige Funktionen gleichmäßig stetig?

9. Welche dieser Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig, welche gleichmäßig stetig?

$$|x|, \qquad \exp(x), \qquad x^2, \qquad \sin x, \qquad \frac{x^3+1}{x^4-1}, \qquad [x] - x.$$

   Hierbei bezeichnet die Gauß-Klammer, $[x]$, die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

10. Gib stetige Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, an, die ihr Supremum annehmen, und solche, die ihr Supremum nicht annehmen. Unter welcher (hinreichenden) Bedingung nimmt eine stetige Funktion ihr Supremum an?

11. Sind die Bilder von Intervallen unter stetigen Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wieder Intervalle? Sind stetige Bilder offener Intervalle wieder offene Intervalle?

12. Wo sind Potenzreihen stetig? Wo sind sie gleichmäßig stetig?

13. Wann existiert die Inverse f^{-1} einer stetigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$? Wann ist die Inverse stetig?

14. Was ist ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$? Was ist ein Banachraum?

15. Was bedeutet Konvergenz in einem normierten Vektorraum?

16. Wie ist die Supremums-Norm für beschränkte, stetige Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, definiert? Warum ist sie tatsächlich eine Norm?

17. Warum ist der Raum der beschränkten, stetigen Funktionen, $\mathcal{BC}(D, \mathbb{R})$, mit der Supremums-Norm ein Banachraum?

18. Gib ein Beispiel einer Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to [0,1]$ an, die punktweise aber nicht gleichmäßig konvergiert.

19. Auf welchen (möglichst großen) Intervallen konvergieren folgende Funktionenfolgen gleichmäßig?

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, \qquad f_n(x) = \exp(-nx^2), \qquad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k.$$

20. Was ist die Umkehrfunktion von $\exp(x)$? Welche Funktionalgleichung erfüllt sie? Wo ist sie definiert? Wo ist sie stetig?

21. Wie ist die allgemeine Potenz x^α für komplexe α und positive, reelle x definiert?

22. Wann ist die Verkettung $g \circ f$ stetiger Funktionen f, g stetig?

23. Wo sind Summe, Differenz, Produkt, bzw Quotient stetiger Funktionen stetig?

24. Wie lauten die stetigen Homomorphismen zwischen beliebigen Gruppen aus $\{(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}_+, *)\}$?