Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Freitag, 14.07.2017, 12 Uhr

Aufgabe 41: Sei (E, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei (E', d_H) der metrische Raum der nichtleeren kompakten Teilmengen von E mit dem symmetrischen Hausdorff-Abstand d_H als Metrik. Zeige, dass (E', d_H) vollständig ist.

Aufgabe 42: Plotte (z.B. mit Matlab oder Mathematica) ein Barnsley-Fraktal mit mindestens drei frei gewählten (2×2) affin linearen Kontraktionen f_i in $\mathbb{R}^2$, die unterschiedliche Fixpunkte haben. Benutze dabei eine stochastische Wahl der Iterationen i_1, i_2, $\ldots$!

Aufgabe 43: In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ und für welche Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f \,:\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto (\|x\|_2)^\alpha \;:=\; \Big(x_1^2 + \cdots + x_n^2\Big)^{\alpha/2}$$

stetig bzw. differenzierbar? Berechne gegebenenfalls den Gradienten ∇f.

Aufgabe 44:

(i) Sei $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Definiere die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Auswertung von f auf der Diagonalen:

$$g(x) \;:=\; f(x,x).$$

Zeige, dass g ebenfalls differenzierbar ist mit

$$[Dg(x)]h \;=\; [Df(x,x)](h,h) \;=\; [\partial_1 f(x,x) + \partial_2 f(x,x)]h.$$

(ii) Betrachte die Funktion

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Berechne die partiellen Ableitungen von f in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sowie die Ableitung der entsprechend (i) definierten Funktion $g(x) = f(x,x)$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$. Erkläre, was im Nullpunkt passiert.

Freiwilliger Zusatz: Verallgemeinere die Aussage (i) auf Funktionen $f : X \times \cdots \times X \to Y$ und Banachräume X, Y. Beweise die verallgemeinerte Aussage.