Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 10.05.2017, 17 Uhr

Aufgabe 5: Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass $f(t_n)$ für jede streng monotone Folge t_n in $[0,1]$ konvergiert. Beweise oder widerlege: die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist

(i) leer oder höchstens endlich,

(ii) höchstens abzählbar.

Aufgabe 6: Seien $f, g : [0,1] \to [0,1]$ Regelfunktionen. Beweise oder widerlege

(i) $g \circ f : [0,1] \to [0,1]$ ist Regelfunktion.

(ii) Ist g stetig, so ist $g \circ f : [0,1] \to [0,1]$ Regelfunktion.

(iii) Ist f stetig, so ist $g \circ f : [0,1] \to [0,1]$ Regelfunktion.

Wie üblich ist die Verkettung definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Aufgabe 7: Beweise:

(i) Sei $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ eine *ungerade* Regelfunktion, d.h. es ist $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a,a]$. Dann gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0.$$

(ii) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *periodische* Regelfunktion mit Periode p, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $g(x+p) = g(x)$. Dann gilt für beliebiges $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{a}^{a+p} g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{0}^{p} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 8: Berechne

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

durch geeignete Approximation des Integranden $f(x) = 1/x$ durch Treppenfunktionen.

Hinweis: Ein möglicher Ansatz benutzt die Partition $1 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 2$, $a_k = 2^{k/n}$, und bietet die Gelegenheit, sich an die Regeln von de l'Hospital zu erinnern.