Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Mittwoch, 17.05.2017, 17 Uhr

Aufgabe 9: Berechne die unter dem Namen *Orthonormalitätsrelationen* bekannten Integrale für alle ganzen Zahlen m, n:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 10: Zeige:

(i) Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen, so ist auch ihre Summe $f + g$ eine Regelfunktion. (Dabei ist $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$.)

(ii) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, so ist auch ihr Betrag $|f|$ eine Regelfunktion. (Dabei ist $|f|(x) := |f(x)|$.)

(iii) Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Regelfunktion.

Aufgabe 11: Berechne vier der folgenden Integrale

(i) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln x\,\mathrm{d}x;$

(ii) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + \sin x};$

(iii) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^3};$

(iv) $\displaystyle\int \exp(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x;$

(v) $\displaystyle\int x\sqrt{1 + x}\,\mathrm{d}x;$

(vi) $\displaystyle\int x(\ln x)^n\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N};$

(vii) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)};$

(viii) $\displaystyle\int t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}.$

Aufgabe 12: [Lemma von Riemann-Lebesgue] Betrachte k-mal stetig differenzierbare Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, so dass f und alle (existierenden) Ableitungen in den Randpunkten a, b verschwinden.

Zeige:

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_a^b f(t) \sin(\omega t) \, \mathrm{d}t = O(1/|\omega|^k).$$

Was gilt für glatte f, also k beliebig? Bitte wundern und das Resultat deuten.