Übungen zur Vorlesung

# Analysis II

Sommersemester 2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Freitag, 26.05.2017, 12 Uhr

**Aufgabe 13:** Berechne die Partialbruchzerlegungen folgender rationaler Funktionen $f : (0, \infty] \to \mathbb{R}$, und bestimme dann ihre Stammfunktionen $F(y) := \int_3^y f(x)\,\mathrm{d}x$:

(i) $f(x) = \dfrac{x+7}{x^2+x-2}$;

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{8+x^3}$;

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+2)^3}$;

(iv) $f(x) = \dfrac{2x^2-5}{(x-1)(x^2-x+6)}$.

**Aufgabe 14:** Finde jeweils eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f$ konvergiert, so dass

(i) $f$ nicht integrierbar ist;

(ii) $f$ zwar integrierbar ist, aber

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;\neq\; \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Betrachte dabei als Integralbegriff sowohl das Regelintegral als auch das Riemann-Integral. (Finde also bis zu 4 Beispiele.)

**Aufgabe 15:**

(i) Zeige, dass die Vereinigung abzählbar vieler Lebesgue-Nullmengen wieder eine Lebesgue-Nullmenge ist.

(ii) Starte mit dem Einheitsintervall $C_0 := [0,1]$. Schneide im $n$-ten Schritt aus jeder Komponente der Menge $C_{n-1}$ das (offene) mittlere Drittel heraus, d.h. $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, usw.

Die *Cantor-Menge* $C$ ist definiert als der Durchschnitt

$$C \;:=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

der zuvor rekursiv definierten Mengen. Zeige, dass $C$ eine Lebesgue-Nullmenge und überabzählbar ist.

**Aufgabe 16:**

(i) Sei $C$ die in der vorigen Aufgabe definierte Cantor-Menge. Zeige, dass deren Indikator-Funktion $\chi_C : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\chi_C(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in C \\ 0, & \text{falls } x \notin C \end{cases}$$

Riemann-integrierbar aber keine Regelfunktion ist. Berechne das Riemann-Integral

$$\int_0^1 \chi_C(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Sei $A \subset [0,1]$ die Menge

$$A := \{\, t \in [0,1] \,|\, \text{die Dezimaldarstellung von } t \text{ enthält wenigstens eine } 7 \,\}.$$

Berechne das Riemann-Integral ihrer Indikator-Funktion,

$$\int_0^1 \chi_A(x)\,\mathrm{d}x.$$