Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Freitag, 09.06.2017, 12 Uhr

Aufgabe 21: Finde ein Gegenbeispiel zum Mittelwertsatz in höheren Dimensionen, d.h. einen Banachraum X und eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f : [a,b] \to X$, so dass *kein* $\xi \in [a,b]$ existiert mit

$$f(b) - f(a) \;=\; (b-a) \cdot f'(\xi).$$

Freiwilliger Zusatz: Zeige, dass in $X = \mathbb{R}^2$ aber zumindest folgender „abgeschwächter Mittelwertsatz“ gilt: Zu jeder $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(a) \neq f(b)$ existieren $\xi \in [a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda \cdot (f(b) - f(a)) \;=\; f'(\xi).$$

Welche Werte λ sind möglich?

Aufgabe 22: Gegeben seien zwei reelle Zahlen $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$. Zeige zunächst für alle $0 \leq a, b < \infty$, dass

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

gilt. Benutze dies, um zu zeigen, dass für beliebige Funktionen $f, g \in C([0,1], \mathbb{R})$ und ihr Produkt fg folgende Ungleichung gilt:

$$\int_0^1 |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \;\leq\; \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^q}.$$

Aufgabe 23: Seien $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ periodische Funktionen mit Periode 2π, und bezeichne

$$c_k(f) \;:=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$$

den k-ten Fourier-Koeffizienten von f.

(i) Zeige, dass für die Fourier-Koeffizienten der Ableitung $f^{(m)}$ gilt:

$$c_k(f^{(m)}) \;=\; (\mathrm{i}k)^m c_k(f).$$

(ii) Definiere die Faltung durch

$$(f \star g)(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zeige, dass für die Fourier-Koeffizienten der Faltung $f \star g$ gilt:

$$c_k(f \star g) \;=\; c_k(f)c_k(g).$$

Begründe bei Vertauschung von Integralen, dass dies hier tatsächlich erlaubt ist.

Aufgabe 24: In der Vorlesung wurde die Fourier-Reihe zur Rechteck-Schwingung

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \in [0, \pi) \\ -1 & \text{für} \quad t \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

berechnet. Plotte die Partialsummen der Fourierreihe von f für $n = 7$, 55 und 99 Glieder, z.B. mit `Mathematica` oder `Matlab`. Beschreibe die Bilder. Vermutest du punktweise Konvergenz für alle t?