Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Freitag, 16.06.2017, 12 Uhr

Aufgabe 25: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(i) Sind g, $|g|$ integrierbar und f beschränkt und stetig, so ist die Faltung $g \star f$ stetig.

(ii) Sind g, $|g|$ integrierbar und f gleichmäßig stetig, so ist die Faltung $g \star f$ (sofern sie existiert) stetig.

(iii) Sind g beschränkt und stetig und f, $|f|$ integrierbar, so ist die Faltung $g \star f$ stetig.

(iv) Sind g gleichmäßig stetig und f, $|f|$ integrierbar, so ist die Faltung $g \star f$ (sofern sie existiert) stetig.

Integrierbar soll hier heißen: das uneigentliche Lebesgue-Integral $\int_{-\infty}^{\infty}$ existiert.

Aufgabe 26: Finde eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen, die in $\tilde{L}^2 = L^2(S^1, \mathbb{C})$ gegen 0 konvergiert, so dass $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jedoch für *kein* $x \in [0, 2\pi]$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 27: Seien $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Außerdem sei f monoton fallend mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Ferner sei $C > 0$ eine Konstante, so dass für alle $a > 0$

$$-C \;<\; \int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t \;<\; C.$$

Zeige, dass dann das Integral

$$\int_0^\infty f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

konvergiert.

Aufgabe 28: Leite mit Hilfe der Stirlingschen Formel folgende Asymptotik der Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ her:

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}, \qquad \text{d.h.} \quad \lim_{n\to\infty} \binom{2n}{n} \frac{\sqrt{n\pi}}{2^{2n}} = 1$$

Freiwillige Zusatzaufgabe:

(i) Zeige, dass (korrekt skaliert) die Asymptotik allgemeiner Binomialkoeffizienten durch die Gaußsche Glockenkurve gegeben ist, d.h. zu gegebenem festen $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\binom{2n}{k} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \mathrm{e}^{-x^2}, \qquad \text{sofern} \quad k - n \sim \sqrt{n}x.$$

Setze dazu zunächst $k = n - \sqrt{n}x$. Benutze die Stirlingformel — als wäre k eine natürliche Zahl —, um den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \binom{2n}{k} \frac{\sqrt{n\pi}}{2^{2n}} \mathrm{e}^{x^2} = 1$$

formal nachzuweisen.

Begründe, warum dies kein Beweis ist.

Begründe dann, warum dies doch ein Beweis ist. Setze dazu $x_n = (k_n - n)/\sqrt{n}$, wobei nun k_n tatsächlich eine natürliche Zahl ist, $0 \le k_n \le 2n$. (In der Numerik heißt das Rückwärts-Fehler-Analyse.) Die Asymptotik $k_n - n \sim \sqrt{n}x$ bedeutet gerade $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Folgere daraus die allgemeine Asymptotik der Binomialkoeffizienten.

(ii) Folgere aus der gezeigten Asymptotik den Flächeninhalt unter der Gaußschen Glockenkurve,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Benutze Teil (i), um eine Approximation der Glockenkurve durch Treppenfunktionen zu erhalten. Berechne das Integral der Treppenfunktion. Benutze dann einen geeigneten Satz zur Vertauschung von Integral und Grenzwert der Folge der Treppenfunktionen.