Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2017

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Freitag, 30.06.2017, 12 Uhr

Aufgabe 33: Zeige, dass folgende Aussage äquivalent zum Baireschen Kategoriensatz der Vorlesung ist:

Sei E ein vollständiger metrischer Raum, der sich als Vereinigung

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

abzählbar vieler abgeschlossener Mengen $A_k \subseteq E$ schreiben lässt. Dann besitzt wenigstens eine dieser Mengen A_k ein nichtleeres Inneres.

Aufgabe 34: Betrachte folgende Variante des „Spiels von Banach-Mazur", das wir noch aus der Analysis I kennen: Annaliese und Annalyx konstruieren gemeinsam eine reelle Zahl $x \in [0, 1]$. Zunächst einigen sich beide auf eine Menge $M \subseteq [0, 1]$. Dann beginnt Annaliese durch Wahl eines beliebigen Intervalls $[a_1, b_1] \subset [0, 1]$. Nun wählen Annalyx und Annaliese abwechselnd ein Intervall $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ der Länge $b_n - a_n < n^{-1}$. Diese Intervallschachtelung definiert eindeutig eine reelle Zahl

$$\{x\} := \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Annaliese gewinnt, falls x in der zuvor festgelegten Menge liegt, $x \in M$. Ansonsten ist Annalyx der Sieger.

Besitzt Annaliese eine Gewinnstrategie, falls M von zweiter Baire-Kategorie ist, d.h. den Durchschnitt abzählbar vieler, offener, dichter Mengen enthält? Besitzt Annalyx eine? Was passiert, falls M eine magere Menge (d.h. Komplement einer Menge von zweiter Baire-Kategorie) ist?

Aufgabe 35: Eine *Cantormenge* sei definiert als eine nichtleere, vollständige, total unzusammenhängende, perfekte Menge $C \subseteq [0,1]$ bezüglich der Standardmetrik auf $\mathbb{R}$. Beweise oder widerlege:

(i) Endliche Vereinigungen von Cantormengen sind wieder Cantormengen.

(ii) Abzählbare Vereinigungen von Cantormengen sind wieder Cantormengen.

(iii) Der Durchschnitt zweier Cantormengen ist entweder leer oder wieder eine Cantormenge.

(iv) Jede Cantormenge ist Lebesgue-Nullmenge.

(v) Das Komplement einer Cantormenge kann keine Lebesgue-Nullmenge sein. (Cantormengen haben niemals „volles Maß.“)

(vi) Jede unendliche, abgeschlossene und total unzusammenhängende Menge $A \subset [0,1]$ ist überabzählbar.

Freiwillige Zusätze:

(vii) Jede Cantormenge ist überabzählbar.

(viii) Jede nichtleere, vollständige, perfekte Menge $A \subset [0,1]$ ist überabzählbar.

Aufgabe 36: Sei E ein Raum mit beschränkter Metrik $d \leq 1$.

(i) Zeige, dass für alle $x \in E$ und $A \subseteq E$ gilt:

$$0 \;=\; d(x,A) \;:=\; \inf_{a \in A} d(x,a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \overline{A}.$$

(ii) Zeige, dass die Menge $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ aller nichtleeren Teilmengen von E versehen mit dem symmetrischen Hausdorff-Abstand

$$d_H(A,B) \;:=\; \max\left\{ \sup_{a \in A} d(a,B),\, \sup_{b \in B} d(b,A) \right\}$$

allgemein *kein* metrischer Raum ist.

(iii) Zeige, dass die abgeschlossenen Teilmengen

$$\mathcal{A}(E) \;:=\; \{\, A \subseteq E \mid A \text{ abgeschlossen und nicht leer} \}$$

zusammen mit dem Hausdorff-Abstand hingegen einen metrischer Raum bilden.