Kernfragen zur Analysis

I. Zahlen

1. Wie lautet das *Wohlordnungsprinzip*?
2. Was ist *Vollständige Induktion*?
3. Zeige mittels Vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
4. Was ist die *Zifferndarstellung* einer natürlichen Zahl n zur Basis b?
5. Seien A und B Mengen. Wann nennt man eine Funktion $f : A \to B$ *injektiv*, wann *surjektiv*?
6. Was sind die *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$, und welche Rekursionsformel erfüllen sie? Wie lässt sich die Rekursionsformel *kombinatorisch* (d.h. als Abzählung von Teilmengen) interpretieren?
7. Wie lautet der *Binomische Lehrsatz*? Wie folgt daraus folgende Identität?
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
8. Was ist eine *rekursiv* definierte Folge? Gib Beispiele an.
9. Was sind *endliche*, *abzählbare* bzw. *überabzählbare* Mengen? Gib Beispiele an.
10. Zeige, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.
11. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Was ist eine *obere Schranke* für A? Wann heißt A nach oben beschränkt?
12. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Wie sind *Supremum* und *Infimum* von A definiert? Wann besitzt A ein Supremum?
13. Sei $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. Bestimme $\inf B$ und $\sup B$.
14. Gib ein Beispiel einer Menge reeller Zahlen an, die ein Supremum aber kein Maximum besitzt.
15. Was ist ein *Dedekindscher Schnitt*? Was ist eine *Intervallschachtelung*?
16. Wie lautet das *Vollständigkeitsaxiom* der reellen Zahlen?
17. Definiere die *komplexen Zahlen* als Paare reeller Zahlen mit geeigneten Additions- und Multiplikationsregeln.
18. Was ist der *Betrag* einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$?
19. Was ist die zu z *komplex konjugierte* Zahl $\bar{z}$?
20. Wie lautet der *Fundamentalsatz der Algebra*?