

## Kernfragen zur Analysis

# II. Folgen und Reihen

1. Wann nennt man eine Folge  $x_n$  reeller Zahlen konvergent und wann divergent?
2. Wie ist der Grenzwert einer Folge definiert?
3. Was sind Supremum und Infimum der Folgen  $(1 + \frac{1}{n})^n$  und  $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  ?
4. Wie sind Häufungswerte einer Folge  $x_n$  definiert?
5. Was sind die Häufungswerte der Folge  $(-1)^n + \frac{1}{n}$  ?
6. Was sind Limes superior und Limes inferior einer reellwertigen Folge? Wann existieren sie? Wann stimmen Limes superior und Limes inferior überein?
7. Wie hängen Limes superior, Limes inferior und der Limes beschränkter reeller Folgen zusammen?
8. Was besagt das Konvergenzkriterium von Cauchy? Warum gilt es?
9. Wann besitzen monotone Folgen einen Grenzwert?
10. Welche dieser Folgen konvergieren, für  $n \rightarrow \infty$ ? Was sind ggf. ihre Grenzwerte?

$$\frac{n^2}{3n-2}, \quad \frac{3n^2-2}{2n^2+3}, \quad \frac{2^n}{n!}, \quad \sqrt[n]{n}, \quad q^{1/n}, \quad q > 0.$$

11. Wie lautet der Satz von Bolzano-Weierstraß?
12. Wieviele Häufungswerte kann eine beschränkte, reellwertige Folge mindestens/höchstens besitzen?
13. Wann heißt eine Reihe konvergent, wann absolut konvergent?
14. Für welche komplexen  $q$  konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  ? Welchen Wert hat die Summe?
15. Warum divergiert die harmonische Reihe? Warum konvergiert die alternierende harmonische Reihe?
16. Wie lauten Cauchy-, Majoranten-, Verdichtungs- und Leibniz-Kriterium für die Konvergenz unendlicher Reihen?
17. Wie lauten Wurzel- und Quotientenkriterium für die Konvergenz unendlicher Reihen? Bei welchen der folgenden Reihen gibt das Quotientenkriterium Aufschluss über Konvergenz oder Divergenz?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}.$$

18. Wie lautet der kleine Umordnungssatz absolut konvergenter Reihen?

19. Wie lautet der große Umordnungssatz absolut konvergenter Reihen?
20. Wie lautet der Produktsatz absolut konvergenter Reihen?
21. Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche konvergieren absolut?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

22. Was ist eine Potenzreihe? Was ist ihr Konvergenzradius? Wie berechnet er sich?
23. Wann ist das Produkt zweier Potenzreihen wieder eine Potenzreihe? Wie lautet sie? Wie hängen die Konvergenzradien der Potenzreihen und ihres Produktes zusammen?
24. Wie lauten die Darstellungen von  $\exp(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\sinh(x)$ ,  $\cosh(x)$  als Potenzreihen?
25. Wie hängen die Exponentialfunktion, die trigonometrischen Funktionen und die Hyperbelfunktionen im Komplexen zusammen?
26. Wie lauten die Additionstheoreme für  $\sin$  und  $\cos$ , bzw. für  $\sinh$  und  $\cosh$ ?
27. Leite die Formeln von de Moivre her, die  $\sin nx$  und  $\cos nx$  als Polynome in  $\sin x$  und  $\cos x$  ausdrücken.