

Kernfragen zur Analysis

V. Integration

1. Was ist eine Regelfunktion? Welche äquivalenten Charakterisierungen gibt es (wenigstens 2)?
2. Gib je zwei Beispiele an für
 - (a) Regelfunktionen und
 - (b) Funktionen, die keine Regelfunktionen sind.
3. Wie ist das Integral einer Regelfunktion definiert?
4. Wie hängen Integration und Differentiation zusammen?
5. Welchen elementaren Funktionen entsprechen folgende unbestimmte Integrale?

$$\int \cos t \, dt; \quad \int \frac{dx}{x}; \quad \int \sqrt[n]{x+1} \, dx; \quad \int \frac{dx}{1+x^2}; \quad \int x^\alpha \, dx, \quad \text{für } \alpha \neq -1.$$

6. Wie lautet der Mittelwertsatz der Integralrechnung?
7. Wie lauten die Regeln für partielle Integration und Substitution? Gib außerdem jeweils ein nichttriviales Beispiel an.
8. Wie integriert man rationale Funktionen? Welche elementaren Integrale muss man dazu kennen?
9. Wie integriert man rationale Funktionen von $\sin t$ und $\cos t$?
10. Wann dürfen Regelintegral und Grenzwert einer Funktionenfolge vertauscht werden?
11. Wie ist das Riemann-Integral definiert?
12. Was ist eine Lebesgue-Nullmenge?
13. Wie ist das Lebesgue-Integral definiert?
14. Was sagt der Satz von Beppo Levi über monotone Folgen Lebesgue-integrierbarer Funktionen?
15. Was sagt der Satz zur majorisierten Konvergenz über die Vertauschbarkeit von Lebesgue-Integral und Grenzwert einer Funktionenfolge?
16. Wie lautet die Hölder-Ungleichung für integrierbare Funktionen $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$?
17. Wie lautet der Schrankensatz? Warum gilt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung nicht für allgemeine Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, mit $N \geq 2$?
18. Wie lassen sich Integrale dank der Trapezregel approximieren?

19. Was sind uneigentliche Integrale?
20. Für welche reellen Exponenten α konvergieren das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^\alpha dx$ bzw. das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^\alpha dx$?
21. Was bedeutet absolute Konvergenz uneigentlicher Integrale? Gib Beispiele
- absolut konvergenter;
 - konvergenter aber nicht absolut konvergenter;
 - nicht konvergenter
- uneigentlicher Integrale.
22. Wie lautet das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^\infty f(t) dt$ bei ∞ ?
23. Welche der folgenden uneigentlichen Riemann-Integrale existieren? Welche konvergieren absolut?
- $\int_1^\infty \sin x dx$;
 - $\int_1^\infty \sin(x^2) dx$;
 - $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$;
 - $\int_1^\infty \frac{\sin x^2}{x} dx$;
 - $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$;
 - $\int_1^\infty \frac{\sin x^2}{x^2} dx$
24. Warum konvergiert die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(\alpha) := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$ für $\alpha > 1$?
25. Wie ist die Gamma-Funktion definiert, und welche Funktionalgleichung erfüllt sie?
26. Wie lautet die Stirling-Formel zur Approximation von $n!$?
27. Wie lautet die Integraldarstellung des Restgliedes der Taylorentwicklung?
28. Was ist eine Dirac-Folge? Gib eine Definition und wenigstens ein Beispiel an.
29. Welche Funktionen können durch Polynome gleichmäßig approximiert werden? Mit welcher Grundidee lassen sich approximierende Polynome zu einer gegebenen Funktion f konstruieren?
30. Was sind die Fourierkoeffizienten zu einer 2π -periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$?
31. Wie lautet die Fourier-Reihe zu f ? In welchem Sinn und wogegen konvergiert die Fourier-Reihe von 2π -periodisch fortgesetzten L^2 -Funktionen $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$?