

Kernfragen zur Analysis

VII. Differentiation im Banachraum

(Teil 1)

1. Wann heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Banachräumen X und Y Fréchet-differenzierbar? Was ist die Fréchet-Ableitung von f ?
2. Ist eine Fréchet-differenzierbare Abbildung f zwischen Banachräumen immer stetig?
3. Was sind die partiellen Ableitungen einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$?
4. Wie lässt sich die Fréchet-Ableitung einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch ihre partiellen Ableitungen ausdrücken?
5. Warum bezeichnet der Gradient die „Richtung des steilsten Anstiegs“ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$?
6. Was ist die Ableitung des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ im Hilbertraum H ?
7. Was ist der Gradient der Abbildung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2^{-1}$, wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm bezeichnet?
8. Wie lautet die Kettenregel für die Ableitung von $f \circ g$?
9. Wie lässt sich die Linearisierung einer Abbildung $f \circ g$ durch die partiellen Ableitungen der Abbildungen $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ ausdrücken?
10. Warum sind stetig differenzierbare Funktionen mit beschränkter Ableitung (global) Lipschitz-stetig? (Beweis!)
11. Was sind die Gateaux-Ableitungen einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Banachräumen X und Y ?
12. Welche der folgenden Aussagen sind für Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ richtig, welche falsch?
 - (a) Partiiell differenzierbare Abbildungen sind stetig.
 - (b) Diffenzierbare Abbildungen sind stetig.
 - (c) Partiiell differenzierbare, stetige Abbildungen sind differenzierbar.
 - (d) Stetig partiiell differenzierbare Abbildungen sind differenzierbar.
 - (e) Stetig partiiell differenzierbare Abbildungen sind stetig differenzierbar.
13. Wie hängen Fréchet-Ableitung und Gateaux-Ableitungen einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Banachräumen X und Y zusammen?
14. Wie lautet der Satz über implizite Funktionen?
15. Unter welcher hinreichenden Bedingung ist eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ lokal invertierbar?

16. Welche Linearisierung hat die implizit durch

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$$

gegebene Funktion $x_n(x_1, \dots, x_{n-1}) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$?