Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2017/18

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Montag, 30.10.2017, 17 Uhr

Aufgabe 1: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ defininiert. Die partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ seien auf U definiert und gleichmig beschränkt.

Beweise oder widerlege: Dann ist f stetig.

Aufgabe 2: Die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sei homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. für alle $\lambda > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$f(\lambda x) \;=\; \lambda^\alpha f(x).$$

Zeige, dass dann für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die *Eulersche Identität* gilt:

$$\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x).$$

Aufgabe 3: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) \;=\; xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad \text{für } (x,y) \neq (0,0).$$

Zeige, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist. Wo gilt $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$ und warum?

Aufgabe 4: Sei $F : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definiert durch

$$F(A, v) \;=\; A\,v.$$

Zeige, dass F zweimal stetig differenzierbar ist, und berechne die erste und zweite Fréchet-Ableitung.