Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2017/2018

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Donnerstag, 18.01.2018, 17 Uhr

Aufgabe 33: Beim Aufräumen des Dachbodens findet Annalyx eine Drahtschleife ∂M, die ein im $\mathbb{R}^3$ eingebettetes Möbiusband M berandet. Er bringt diese Drahtschleife in die Nähe seiner angeschalteten Induktionsherdplatte. Annalyx fragt sich, ob Strom durch das Möbiusband fließt. Kannst Du ihm helfen?

Hinweis: Induktionsherdplatten arbeiten mit sich zeitlich ändernden Magnetfeldern. Elektrisches Feld E und Magnetfeld B erfüllen

$$\operatorname{rot} E \;=\; -\frac{\partial}{\partial t} B.$$

Im Draht wird ein Strom erzeugt, wenn das Integral des elektrischen Feldes,

$$\int_{\partial M} E \cdot \vartheta, \qquad \vartheta \text{ Einheitstangentenvektor an } \partial M,$$

entlang des Drahtes nicht verschwindet.

Aufgabe 34: Bestimme das Oberflächenintegral

$$\int_{S^2} f \cdot n \,\mathrm{d}S, \qquad \text{mit} \qquad f(x,y,z) \;:=\; \begin{pmatrix} y^3 \\ z^3 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

über der Einheitssphäre $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ mit äußerer Normalen n.

Aufgabe 35: Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{rot} f = 0$. Zeige, dass sich f als Gradient einer C^1-Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ schreiben lässt:

$$f \;=\; \operatorname{grad} \varphi.$$

Hinweis: Definiere φ durch (ein) geeignete(s) Wegintegral(e). Zeige dann, dass φ wohldefiniert ist bzw. der Gradient das gesuchte Vektorfeld liefert.

Aufgabe 36: Es sei $K \subset \mathbb{R}^N$ ein kompaktes C^1 Gebiet mit äußerer Normalen n. Ferner seien $u, v \in C^2(U, \mathbb{R})$ auf einer offenen Umgebung U von K gegeben. Definiere

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) \;=\; \nabla u(x) \cdot n(x)$$

Zeige, dass dann die Greenschen Formeln gelten

(i) $\displaystyle\int_K v\,\Delta u\,\mathrm{d}x = -\int_K \sum_{i=1}^N u_{x_i} v_{x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial K} v \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S\,;$

(ii) $\displaystyle\int_K v\,\Delta u\,\mathrm{d}x = \int_K u\,\Delta v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial K} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) \mathrm{d}S\,.$