Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2017/2018

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 01.02.2018, 17 Uhr

Aufgabe 41: Es sei im weiteren $1 \leq p, q < \infty$. Gegeben sei eine Funktion

$$f \in \mathcal{L}^p = \left\{ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\middle|\; x \mapsto |g(x)|^p \text{ ist Lebesgue-integrierbar} \right\}$$

Betrachte nun die Voraussetzungen

(a) f ist beschränkt, beziehungsweise

(b) $\operatorname{supp}(f) \subset V$ und $\operatorname{Vol}(V) < \infty$.

und die Behauptungen

(i) $f \in \mathcal{L}^q$, für $q > p$, beziehungsweise

(ii) $f \in \mathcal{L}^q$, für $q < p$.

Betrachte alle vier Fälle, die aus beliebigen Kombinationen je einer Voraussetzung (a), (b) und je einer Behauptung (i), (ii) entstehen. Beweise oder widerlege die Behauptung in jedem der vier Fälle.

Aufgabe 42: Beweise den Satz von Egorov. Dieser besagt, dass L^1-Konvergenz auf Mengen großen Maßes sogar gleichmäßig ist.
Genauer: Es sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ mit endlichem Volumen. Ferner sei $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Familie Lebesgue-integrierbarer Funktionen, die fast überall gegen eine Lebesgue-integrierbare Funktion f konvergiert. Zeige, dass dann für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Lebesgue-messbare Menge $A \subset \Omega$ mit $\operatorname{Vol}(\Omega \setminus A) < \delta$ existiert, so dass für alle $x \in A$ und $j \geq k$ gilt:

$$|f(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

Freiwilliger Zusatz: Ist die Bedingung an das Volumen von Ω notwendig?

Aufgabe 43: Sei $X := L^1(\mathbb{R})$ und $T : \mathbb{R} \to L(X)$ die Shift-Abbildung
$\tau \mapsto T(\tau) \in L(X)$ mit $(T(\tau)u)(t) := u(t + \tau)$. Ist die Abbildung T stetig ?

Aufgabe 44: [Lemma von Fatou] Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen mit $f_n \geq 0$ fast überall. Weiter existiert ein $C > 0$, so dass für alle n: $\int f_n \leq C < \infty$. Zeige, dass dann gilt

$$f := \liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathrm{Leb}$$

und

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Freiwilliger Zusatz:

(i) Gib je ein Beispiel für Gleichheit und Ungleichheit an.

(ii) Ist die Aussage immer noch richtig, wenn das Integral des Betrages beschränkt ist, es aber keine Bedingung an das Vorzeichen der f_n gibt?