

Übungen zur Vorlesung
Analysis III
Wintersemester 2017/18
Bernold Fiedler, Isabelle Schneider
<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>
Abgabe: Donnerstag, 16.11.2017, 17 Uhr

Aufgabe 9: Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definiere eine Abbildung

$$F : C^1(H, H)^3 \times H \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(\chi, \varphi, \psi, x) = \langle \chi(\varphi(x)), \chi(\psi(x)) \rangle.$$

Bestimme die partiellen Ableitungen $\partial_\chi F$, $\partial_\varphi F$, $\partial_\psi F$, $\partial_x F$.

Aufgabe 10: Auf dem Funktionenraum $C := C^\infty(X, \mathbb{R}^m)$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, ist die Lie-Klammer definiert durch

$$[f, g](x) = Df(x) \cdot g(x) - Dg(x) \cdot f(x).$$

Zeige:

- (i) $[\cdot, \cdot] : C \times C \rightarrow C$ ist bilinear und antisymmetrisch.
- (ii) Für alle $f, g, h \in C$ gilt die Jacobi-Identität:

$$[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0.$$

Aufgabe 11: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = (x_1 + x_2 + \dots + x_N)^n$$

gegeben ist.

- (i) Bestimme die Taylorentwicklung von f in $(0, 0, \dots, 0)$ zur Ordnung n .
- (ii) Vergleiche im Fall $N = 2$ die Taylorentwicklung mit dem Binomischen Satz.

Aufgabe 12: Integriere die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die außerhalb der angegebenen Mengen Null sind.

(i) $f(x, y) := \sqrt{1 - y^2}$ für $|x| \leq 1, |y| \leq 1$;

(ii) $f(x, y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ für $x^2 + y^2 \leq 1$;

(iii) $f(x, y) := \sqrt{1 - y^2}$ für $|x| \leq 1, |y| \leq (1 + x)/2$.

In welchem Verhältnis stehen die Integrale zueinander? (Dieses Resultat geht auf Archimedes zurück).