Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2017/18

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Donnerstag, 23.11.2017, 17 Uhr

Aufgabe 13: Annalyx braucht eine neue Brille. Die optimale Krümmung der Linsenoberfläche wäre eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto z := k(x, y)$, $k(0, 0) = 0$, $k \geq 0$. Der Optiker kann leider nicht so präzise arbeiten und gibt sich mit einer Taylor-Approximation bis zur 2. Ordnung zufrieden.

Dummerweise hat Annalyx Astigmatismus, d.h. die Krümmung der Linse ist nicht in alle Richtungen gleich. Für die Fertigung der Brille notiert der Optiker sich daher (ausgehend vom Mittelpunkt der Linse bei (x_0, y_0)), die *Richtung der maximalen Krümmung* sowie deren *Wert* (Dioptrien), und außerdem die *Differenz zwischen der minimalen und der maximalen Krümmung* (Stärke des Astigmatismus).

Annalyx wundert sich, warum der Optiker nicht auch die *Richtung der minimalen Krümmung* angegeben hat. Muss er sich Sorgen machen, dass die Brille nicht korrekt gefertigt wird?

Aufgabe 14: Sei $A \in O(n)$, d.h. $A^T A = \mathrm{Id}_N$, wobei A^T die transponierte Matrix der reellen $N \times N$-Matrix A ist und Id_N die N-reihige Einheitsmatrix. Zeige:

Für jede Funktion $f \in C_c^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(Ax)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 15: [vgl. Forster] Betrachte den Raum

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \;=\; \Big\{ f \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \;\mid\; \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall k \in \mathbb{Z}^N \;:\; f(x) = f(x + 2\pi k) \Big\}$$

der stetigen, gitter-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}^N$. Zeige, dass die durch

$$I(f) \;=\; \int_0^{2\pi} \Big(\cdots \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\,\mathrm{d}x_1 \Big)\,\mathrm{d}x_2 \Big) \cdots \Big)\,\mathrm{d}x_N$$

definierte Abbildung $I : C_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ monoton, linear und translationsinvariant ist.

Freiwilliger Zusatz: Gibt es noch andere Abbildungen $\tilde{I}$ mit diesen Eigenschaften?

Aufgabe 16: Sei $f \in C^0_c([a,b], \mathbb{R}_+)$ stetig und positiv. Zeige, dass dann gilt:

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \right) \;\geq\; (b-a)^2.$$

Bringe dazu die linke Seite auf die Form

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Freiwilliger Zusatz: Beweise die Ungleichung, ohne die vorgeschlagene Umformung zu verwenden.