Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2017/18

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Donnerstag, 30.11.2017, 17 Uhr

Aufgabe 17: Zu Mengen X von Funktionen $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ bezeichne $X^{\downarrow}$ diejenigen f, welche punktweise als monotoner Limes $X \ni f_n \searrow f$ geschrieben werden können. Analog $f \in X^{\uparrow}$ für $X \ni f_n \nearrow f$. Beispielsweise ergeben sich so $\mathcal{H}^{\downarrow}$, $\mathcal{H}^{\uparrow}$ aus $X = C_c$, in der Notation der Vorlesung.

Beweise oder widerlege:

(i) $\mathcal{H}^{\downarrow} \cap \mathcal{H}^{\uparrow} = C_c$;

(ii) $(\mathcal{H}^{\downarrow})^{\downarrow} = \mathcal{H}^{\downarrow}$;

(iii) $1_{\mathbb{Q}} \in \mathcal{H}^{\downarrow}$;

(iv) $1_{\mathbb{Q}} \in (\mathcal{H}^{\downarrow})^{\uparrow}$;

(v) (freiwillig) $(\mathcal{H}^{\uparrow})^{\downarrow} = (\mathcal{H}^{\downarrow})^{\uparrow}$;

Aufgabe 18:

(i) Es seien $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ oberhalb stetig und $\lambda \in [0, +\infty)$. Sind dann die Funktionen

$$f + g, \quad f - g, \quad \lambda f, \quad f \cdot g, \quad f/g,$$

dort wo sie definiert sind, oberhalb stetig?

(ii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oberhalb stetig und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Sind dann die Funktionen

$$f \circ g \quad \text{beziehungsweise} \quad g \circ f$$

wieder oberhalb stetig?

Aufgabe 19: Es sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ unterhalb stetig und $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen:

(i) Es gibt ein $x_0 \in K$ mit $f(x_0) = \sup\{f(x) \,|\, x \in K\}$, d.h. f nimmt sein Maximum an.

(ii) Es gibt ein $x_1 \in K$ mit $f(x_1) = \inf\{f(x) \,|\, x \in K\}$, d.h. f nimmt sein Minimum an.

Aufgabe 20: Die unterhalb stetigen Funktionen $f_i \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^N)$, $i \in I$, seien bezüglich der Indexmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ geordnet, d.h.

$$\forall k, \ell \in I,\ k \leq l \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \qquad f_k(x) \leq f_\ell(x).$$

Zeige:

$$\sup_{i \in I} \int_{\mathbb{R}^N} f_i(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} \sup_{i \in I} f_i(x)\,\mathrm{d}x.$$