

Übungen zur Vorlesung
Analysis III
Wintersemester 2017/18
Bernold Fiedler, Isabelle Schneider
<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>
Abgabe: Donnerstag, 7.12.2017, 17 Uhr

Aufgabe 21: Annaliese ist zu Besuch bei ihrer vierdimensionalen Tante. Sie erzählt ihr von Archimedes' Resultaten, der die Volumina von Zylinder, Kugel und Kegel sowie deren Verhältnisse bestimmt hat. Was würde ihre Tante wohl dazu sagen?

Aufgabe 22: In der Vorlesung haben wir für $N > 2$ und die Volumina v_N der Einheitskugeln im \mathbb{R}^N die Rekursionsformel $v_N = v_{N-2}2\pi/N$ hergeleitet.

Zeige die geschlossene Darstellung $v_N = \pi^{N/2}/\Gamma(1 + N/2)$ für alle natürlichen Zahlen N . Dabei ist Gamma $\Gamma(a) := \int_0^\infty t^{(a-1)} \exp(-t) dt$ die Eulersche Gammafunktion.

Aufgabe 23:

(i) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers in \mathbb{R}^3 , der entsteht, wenn man den Graphen von f um die horizontale Achse dreht.

(ii) Bestimme das Volumen des dreidimensionalen Volltorus

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \left(2 - \sqrt{y^2 + z^2}\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Aufgabe 24: Bestimme das maximale Volumen eines in ein Ellipsoid

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

einbeschriebenen Quaders.

Freiwillige Zusatzaufgabe: Bestimme das maximale Volumen eines in ein Ellipsoid $\sum_{k=1}^N x_k^2/a_k^2 = 1$ einbeschriebenen N -dimensionalen Quaders.