Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2017/18

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Donnerstag, 14.12.2017, 17 Uhr

Aufgabe 25: Gegeben seien 2 identische (genügend lange) Zylinder im $\mathbb{R}^3$, deren Längsachsen sich unter einem rechten Winkel schneiden. Bestimme das Volumen der Schnittmenge beider Zylinder.

Freiwillige Zusatzaufgabe: Betrachte den allgemeinen Fall von n identischen Zylindern, deren Längsachsen in einer gemeinsamen Ebene liegen und sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Dabei sollen benachbarte Achsen den gleichen Winkel $2\pi/n$ bilden. Bestimme das Volumen der Schnittmenge aller Zylinder.

Aufgabe 26: Es sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension $N-1$. Zeige, dass sich M lokal nahe $a \in M$ als Graph $h : T_aM \to \mathbb{R}$ über dem Tangentialraum schreiben lässt.

Aufgabe 27: Sei M eine C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension zwei des $\mathbb{R}^3$. Sei A eine affine Ebene in $\mathbb{R}^3$, so dass $A \cap M = \{x\}$ aus genau einem Punkt besteht. Zeige, dass dann $A = x + T_xM$.

Freiwillige Zusatzaufgabe: Verallgemeinere auf $N-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$.

Aufgabe 28: Annalyx will um die Welt segeln und benutzt dazu eine Originalkarte von G. Mercator (1512-1594). Er ist sich jedoch nicht ganz sicher, ob die Karte auch korrekt ist und informiert sich: Die Mercator-Projektion $P : S^2 \setminus \{N, S\} \to Z$ bildet die Einheitserde S^2 (bis auf den Nordpol N und den Südpol S) auf den Zylinder $Z = S^1 \times \mathbb{R}$ ab, der die Erde am Äquator berührt. Koordinaten auf S^2 sind hier die geographische Länge $\phi \in [0, 2\pi)$ und die geographische Breite $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Die Projektion hat die Form $P(\phi, \theta) = (\phi, p(\theta))$ mit $p(0) = 0$.

(i) Hilf Annalyx, indem du $p : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ bestimmst, so dass P winkeltreu ist.

(ii) Bestimme konkret die Abstände l zwischen Breitenkreis x Grad nördlicher Breite und dem Äquator für

$$x \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$$

Vergleiche die Ergebnisse mit den folgenden Werten, die von Annalyx' Originalkarte von Mercator stammen. (1567, ca. 100 Jahre vor Newton)

x	10	20	30	40	50	60	70	80
l/mm	55	112	172	238	314	407	534	749

(iii) Nun fragt Annalyx sich, ob er auch per Lineal navigieren kann, d.h. ob die Urbilder von Geraden auf Z sogenannte Loxodrome sind (Kurven auf der Sphäre, die alle Längenkreise unter dem gleichen Winkel schneiden). Kannst du ihm helfen?