Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2017/18

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Donnerstag, 21.12.2017, 17 Uhr

Aufgabe 29: Annalyx fährt Kunsstücke mit dem Fahrrad. Dabei fährt er folgende Kurven bzw. Kurvenstücke in $\mathbb{R}^2$ ab:

(i) eine Ellipse: $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ mit $a, b > 0\,;$

(ii) eine „8“ (Lemniskate): $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0\}$ mit $a > 0\,;$

(iii) und $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \log x,\ a < x < b\}$ mit $0 < a < b < \infty$.

Wie weit ist Annalyx jeweils gefahren?

Hinweis: Schlage ggf. unter dem Stichwort „elliptische Integrale“ in einer Formelsammlung nach. Eine geeignete Parametrisierung der Lemniskate gewinnt man z.B. in Polarkoordinatendarstellung durch Wahl des Parameters $t = \cos(2\varphi)$.

Aufgabe 30: Betrachte einen durch die Kurve $y = x^2$ gegebenen Parabolspiegel in der Ebene. Einfallende Lichtstrahlen parallel zur y-Achse werden am Spiegel reflektiert, d.h. der Einfallswinkel (Winkel zwischen einfallendem Lichtstrahl und Normalenvektor an die Parabel) ist gleich dem Ausfallswinkel.

Zeige, dass sich alle reflektierten Strahlen in einem Punkt schneiden und bestimme diesen Brennpunkt.

Freiwilliger Zusatz: Was ist der geometrische Ort der Punkte der Ebene, die von einem gegebenen Punkt denselben Abstand wie zu einer gegebenen Geraden haben?

Aufgabe 31: Sei $\mathrm{div}F > 0$ innerhalb einer Umgebung des Einheitsballs $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Zeige, dass F nicht überall tangential an die Oberfläche der Sphäre $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$ sein kann.

Aufgabe 32: [Rotationsinvarianz im Satz von Gauß] Sei K ein kompaktes C^1-Gebiet im $\mathbb{R}^N$ mit äußerer Normale $\mathbf{n}(x)$ auf dem Rand $x \in \partial K$. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger, und $R \in SO(N)$ eine orthogonale $N \times N$-Matrix. Definiere

$$f^R(x) := Rf(R^{-1}x).$$

Beweise

(i) $\displaystyle\int_{RK} \operatorname{div} f^R = \int_K \operatorname{div} f\,;$

Dabei bezeichnet $RK := \{Rx \,|\, x \in K\}$ das mit R gedrehte Gebiet. Für die mitgedrehte äußere Normale $\mathbf{n}^R(x) := R\,\mathbf{n}(R^{-1}x)$ zu $\partial(RK)$ beweise

(ii) $\displaystyle\int_{\partial(RK)} f^R \cdot \mathbf{n}^R = \int_{\partial(K)} f \cdot \mathbf{n}\,.$