Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2017/2018

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Donnerstag, 11.01.2017, 17 Uhr

Weihnachtsaufgaben

Es handelt sich ausschließlich um freiwillige Zusatzaufgaben, die zusätzliche oder fehlende Extrapunkte einbringen können. Im Tutorium werden nur versuchte Lösungen besprochen!

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!

Weihnachtsaufgabe 1: Dir obliegt die Versorgung der Gäste der Neujahrs-Party mit Getränken. Dazu transportierst Du ein Fass Bowle auf einem Schlitten durch die Stadt. Aufgrund diverser Schlaglöcher beginnt das Fass jedoch bedrohlich zu kippeln. Um es zu stabilisieren, schenkst Du die Bowle an umstehende Schaulustige aus. (Selbst trinkst Du natürlich nichts: Don't drink and drive!)

Wie weit muss das Fass ausgetrunken werden, damit es möglichst stabil steht?

Hinweis: Die Höhe des Schwerpunktes

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} x\,\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

soll also minimiert werden! Hierbei ist ρ die Dichte, die für übliche irdische Gefäße und Flüssigkeiten in selbigen einen beschränkten Träger hat. Das leere Fass soll dabei eine Masse m und eine Schwerpunktshöhe h haben (die man normieren kann). Die Form des Fasses kann als zylindrisch angenommen werden.

Zusätze: Was passiert für ganz leichte Gefäße, $m \to 0$, bei konstanter Form resp. Schwerpunktshöhe? Kannst Du die Schwerpunktshöhe auch noch minimieren, falls das Fass vor dem Umtrunk schon vom Schlitten gefallen war und deshalb nun eine unregelmäßige Form aufweist?

Weihnachtsaufgabe 2: Nachdem der Bowle-Transport dank der selbstlosen Hilfe vieler Passanten gut geklappt hat, wendet sich eine Transportfirma an Dich.

Die Firma plant, Bowle in Fässern zu transportieren, die entsprechend der vorigen Aufgabe zwecks maximaler Stabilität befüllt werden. Alle Fässer haben die gleiche (zylindrische) Form und Größe. Allerdings stehen unterschiedliche Materialien für die Fässer zur Verfügung.

Bestimme die Masse des Fasses mit bestmöglicher Nutzlast, d.h. maximalem Verhältnis der Masse der eingefüllten Bowle zur Gesamtmasse von Bowle, Fass und Schlitten.

Bestimme eine allgemeine Lösung und/oder wähle plausible Werte der Parameter.

Weihnachtsaufgabe 3: Annalyx und Annaliese finden folgende Version der Maxwell-Gleichungen,

$$\operatorname{div} E(t,x) = \varrho(t,x) \tag{1}$$
$$\operatorname{div} B(t,x) = 0 \tag{2}$$
$$\operatorname{rot} E(t,x) = -\partial_t B(t,x) \tag{3}$$
$$\operatorname{rot} B(t,x) = j(t,x), \tag{4}$$

wobei E die elektrische Feldstärke, B die magnetische Flussdichte ist, j die elektrische Stromdichte und ϱ die Ladungsdichte. Annaliese behauptet, dass diese Version von vor 1865 nicht korrekt ist.

(i) Interpretiere zunächst die Gleichung für die Ladungserhaltung,

$$\operatorname{div} j + \partial_t \varrho = 0.$$

(ii) Zeige:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} B = 0.$$

Folgere, daraus $\operatorname{div} j = 0$. Für welche Ladungsdichten $\varrho(t,x)$ kann daher die obige Version der Maxwell-Gleichungen nicht gelten?

(iii) Annaliese findet Maxwells Formulierung von Gleichung (4) und behauptet, dies sei nun die allgemeine Fassung:

$$\operatorname{rot} B = j + \partial_t E.$$

Annalyx zweifelt daran, und behauptet, dass er Funktionen $\Psi(t,x)$ finden kann, sodass $\operatorname{rot} B = j + \partial_t E + \Psi$, und trotzdem $\operatorname{div} \operatorname{rot} B = 0$ erfüllt ist. Gibt es solche Funktionen? Welche Vorraussetzungen müssten sie erfüllen?

Weihnachtsaufgabe 4: Zeige den Integralsatz von Cauchy: Für komplex differenzierbare $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt, dass das Integral über geschlossene Kurven verschwindet.

Weihnachtsaufgabe 5: Nachdem Annalyx' die winkeltreue Mercator-Projektion (Aufgabe 28) kennengelernt hat, beschäftigt er sich nun mit der echten Zylinderprojektion der Einheitssphäre. Es handelt sich dabei um eine Zentralprojektion der Sphäre aus ihrem Mittelpunkt auf einen Zylinder, dessen Symmetrieachse durch Nord- und Südpol verläuft. (Der Radius des Zylinders kann sich vom Radius der Sphäre unterscheiden.) Ihre Umkehrung stellt eine Karte der Sphäre ohne Nord- und Südpol dar. Ist die echte Zylinderprojektion winkeltreu?

Vergleiche mit der Mercator-Karte: Wie groß ist die Abweichung der Zylinderprojektion (mit optimal gewähltem Radius) von einer Mercator-Karte der Karibik, also für geographische Breiten von ca. 10 bis 30 Grad?

Weihnachtsaufgabe 6: Annalyx will eine Expedition zum Südpol machen und braucht eine Karte. Er entscheidet sich für die Umkehrung der stereographischen Projektion, gegeben durch Karte $\phi_N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\phi_N(x_1, x_2) \;=\; \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}(x_1, x_2, -1) + (0, 0, 1),$$

für Einheitssphäre ohne den Nordpol. Annaliese hat Zweifel und behauptet anhand ihrer Skizze, ϕ_N sei nicht längentreu. Hat sie recht? Bestimme den Breitengrad, bis zu dem Annalyx die Karte relativ gefahrlos benutzen kann, d.h. den Breitengrad, bis zu dem die Längenverzerrungen der durch ϕ_N dargestellten Südpolarregion unter 1% bleiben.

Weihnachtsaufgabe 7: Seien $0 < r < R$ gegeben. Bestimme eine Abbildung $\eta : (-L, L) \to (-\pi, \pi)$, so dass durch $\psi : (0, 2\pi) \times (-L, L) \to \mathbb{R}^3$,

$$\psi(\xi, \vartheta) \;=\; \begin{pmatrix} (R + r\cos\eta(\vartheta))\cos\xi \\ (R + r\cos\eta(\vartheta))\sin\xi \\ r\sin\eta(\vartheta) \end{pmatrix},$$

eine winkeltreue Karte des Torus gegeben ist. Wähle dabei L maximal.

Weihnachtsaufgabe 8: Sei

$$F(x, y) \;=\; 2x^4 + y^3 + py - q, \qquad \text{mit } p, q > 0.$$

Für hinreichend kleine $|x|$ lässt sich die Gleichung $F(x, y) = 0$ durch positive $y(x)$ auflösen. Berechne $y'(x)$, ohne $y(x)$ explizit auszurechnen.

Weihnachtsaufgabe 9: Welche Punkte auf der Einheitskugel

$$S^{n-1} \;=\; \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2^2 = 1\right\}$$

in $\mathbb{R}^n$ minimieren bzw. maximieren die p-Norm, $1 < p < \infty$?

$$\|x\|_p \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Weihnachtsaufgabe 10: Betrachte die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} f_1 &= z^2 - x^2 - y^4 - 1, \\ f_2 &= z - x^3 - x^2 + y^2, \\ f_3 &= x^2 + zy^2 - x^2 y. \end{aligned}$$

Plotte (z.B. mit Mathematica: ParametricPlot3D) für jedes der f_i die Niveaumengen $f_i^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$. Untersuche die Flächen nach lokalen Extrema in z-Richtung.

Weihnachtsaufgabe 11: Bestimme den Schwerpunkt des „Tellers“ konstanter Dichte

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 1,\ z \le 0,\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 \le \frac{25}{4}\right\}.$$

Weihnachtsaufgabe 12: [vgl. Forster] Zeige, dass sich jede Matrix $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ als endliches Produkt von Matrizen

$$
{}^k B_{a_1,\ldots,a_n} \;=\; \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

(d.h. Einheitsmatrizen mit einer geänderten Zeile) darstellen lässt.

Sei nun $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und A eine invertierbare Matrix. Beweise den Substitutionssatz

$$
\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(Bx)\,|\det B|\,\mathrm{d}x
$$

für die speziellen Matrizen ${}^k B_{a_1,\ldots,a_n}$ und dadurch auch für die allgemeine invertierbare lineare Abbildung A.

Hinweis: Ein möglicher Weg ist es, zunächst Dreiecksmatrizen als Produkt von Matrizen des obigen Typs darzustellen und z.B. das Gaußsche Eliminationsverfahren zu nutzen, um eine Dreiecksmatrix zu erhalten.

Weihnachtsaufgabe 13: Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ mit $b > 0$. Definiere die Funktionen $F_n : [0, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$,

$$
F_0(x) \;=\; \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad F_n(x) \;=\; \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f(y)\,\mathrm{d}y.
$$

Zeige, dass dann gilt

$$
F_n(x) \;=\; \int_0^x \int_0^{x_n} \cdots \int_0^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.
$$

Berechne das Volumen der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 1\}$.