Kernfragen zur Analysis

IX. Lebesgue-Integral

1. Wie kann das Lebesgue-Integral als Grenzwert von Integralen halbstetiger Funktionen definiert werden?

2. Wie kann man die Lebesgue-integrierbaren Funktionen durch Grenzwerte stetiger Funktionen charakterisieren?

3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?

   - Ist $f \in \mathrm{Leb}$, so sind $f^{\pm} := \max\{\pm f, 0\} \in \mathrm{Leb}$.
   - Ist $f \in \mathrm{Leb}$, so ist $|f| \in \mathrm{Leb}$.
   - Ist $|f| \in \mathrm{Leb}$, so ist $f \in \mathrm{Leb}$.
   - Sind $f, g \in \mathrm{Leb}$, so sind $\max(f, g), \min(f, g) \in \mathrm{Leb}$.

4. Was sind Lebesgue-Nullmengen? Gib wenigstens zwei Charakterisierungen an!

5. Welche der folgenden Aussagen sind für $M \subset \mathbb{R}$ richtig, welche falsch?

   - Ist M eine Nullmenge, so ist M abzählbar.
   - Ist M abzählbar, so ist M eine Nullmenge.
   - Ist M_k eine Nullmenge für jedes $k \in \mathbb{N}$, so auch die Vereinigung $\bigcup\{M_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
   - Ist M_k eine Nullmenge für jedes $k \in \mathbb{Q}$, so auch die Vereinigung $\bigcup\{M_k \mid k \in \mathbb{Q}\}$.
   - Ist M_k eine Nullmenge für jedes $k \in \mathbb{R}$, so auch die Vereinigung $\bigcup\{M_k \mid k \in \mathbb{R}\}$.
   - $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist eine Nullmenge.
   - Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $\phi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, so ist $\phi(M)$ eine Nullmenge.

6. Welche hinreichenden Bedingungen an eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen gibt es, um Integral und Grenzwert vertauschen zu dürfen?

7. Wie lautet der Konvergenzsatz von Beppo Levi? Warum gilt er? Beweise!

8. Wie sind die Banachräume L^p definiert?

9. Wie kann man die Elemente in L^1 als Grenzwerte glatter Funktionen mit kompaktem Träger charakterisieren?

10. Wie lautet die Hölder-Ungleichung?

11. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (Es sei $1 \leq p < q < +\infty$.)

    - Ist $f \in L^p$ beschränkt, so ist $f \in L^q$.
    - Ist $f \in L^q$ beschränkt, so ist $f \in L^p$.
    - Ist $f \in L^p$ und $\mathrm{Vol}(\mathrm{supp}\, f) < \infty$, so ist $f \in L^q$.
    - Ist $f \in L^q$ und $\mathrm{Vol}(\mathrm{supp}\, f) < \infty$, so ist $f \in L^p$.