

Kernfragen zur Analysis

VII. Differentiation im Banachraum

(Teil 2)

1. Wie ist die zweite (Fréchet-)Ableitung einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Banachräumen X und Y definiert? Was sind die zweiten Gateaux-Ableitungen?
2. Wie lässt sich die zweite Fréchet-Ableitung einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch ihre partiellen Ableitungen ausdrücken?
3. Wann darf man die Reihenfolge der zweiten partiellen Ableitungen vertauschen?
4. Was sind die erste und zweite Ableitung des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ im Hilbertraum H ?
5. Wie lautet die Kettenregel für die zweite Ableitung von $f \circ g$?
6. Wie lässt sich die zweite Ableitung einer Abbildung $f \circ g$ durch die partiellen Ableitungen der Abbildungen $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ausdrücken?
7. Welche Beziehung herrscht zwischen dem Gradient und den Niveauflächen $\{f \equiv \text{const.}\}$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$?
8. Welche notwendigen und welche hinreichenden Bedingungen für die Existenz lokaler Maxima/Minima einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kennst Du?
9. Wo nimmt eine symmetrische quadratische Form ihr Maximum/Minimum auf der Einheitssphäre an? Beweis?
10. Wie lautet die Taylor-Approximation einer Funktion $f \in C^{n+1}(U, Y)$, $U \subseteq X$ offen, in einem Punkt $x_0 \in U$? Welche Darstellungen/Abschätzungen des Restgliedes kennst Du?