

Übungen zur Vorlesung

**Analysis I**

WiSe 2021/2022

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

Abgabe: Mittwoch, 19.01.2022, 17 Uhr

**Aufgabe 33:** Prüfe folgende Funktionen auf Stetigkeit und gib die Stetigkeitsgebiete an:

$$(i) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{falls } x \neq 3 \\ 4 & \text{falls } x = 3 \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} x^{1/n} & \text{falls } x \geq 0 \\ -|x|^{1/n} & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \text{mit festem } n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) f(x) = \begin{cases} x^{-2}(\cos x - 1) & \text{falls } x \neq 0 \\ -1/2 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$$(iv) f(x) = \begin{cases} \left| \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor - \frac{1}{2} \right| & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet  $\lfloor x \rfloor$  wieder die größte ganze Zahl kleiner oder gleich  $x$ .

**Aufgabe 34:** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *konvex*, falls für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und alle  $t \in (0, 1)$  gilt

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Dies bedeutet, dass der Graph von  $f$  unterhalb aller seiner Sehnen verläuft.

Zeige, dass jede konvexe Funktion stetig ist.

*Hinweis:* Nimm indirekt an, es gäbe eine Unstetigkeitsstelle. Finde dann in der Nähe eine Sehne, die nicht oberhalb des Graphen liegt.

**Aufgabe 35:** Beweise oder widerlege die Existenz stetiger Funktionen

(i)  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ;

(ii)  $f : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \rightarrow [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ;

(iii)  $f : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ ;

(iv)  $f : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \{0, 1\}$ ;

(v)  $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ;

jeweils mit  $f(0) = 1$  und  $f(1) = 0$ .

**Aufgabe 36:** Gibt es eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die *jeden* Wert  $y \in \mathbb{R}$

(i) genau zweimal,

(ii) genau dreimal,

(iii) genau 2022mal

annimmt?