Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2021/2022

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Mittwoch, 26.01.2022, 17 Uhr

Aufgabe 37:

(i) Zeige, dass die Gleichung

$$\mathrm{e}^x = \frac{1}{x}$$

genau eine reelle Lösung x_* besitzt.

(ii) Benutze den Zwischenwertsatz, um x_* mit dem Taschenrechner o.ä. auf zwei Nachkommastellen genau zu berechnen.

(iii) Iteriere $f(x) := e^{-x}$ numerisch, z.B. mit Startwert $x_0 = 1$. Beschreibe die Folge $x_n := f^n(x_0)$ und deute ihr Verhalten im Lichte von (i), (ii).

Aufgabe 38: Zeige, dass am 26.01.2022, 17:00 Uhr (Ortszeit Berlin) an zwei Antipodenpunkten des Äquators dieselbe Temperatur herrschen wird.

Aufgabe 39: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Sei y ein Fixpunkt der n-ten Iterierten f^n von f, d.h. $f^n(y) = y$.

Beweise im Fall $n = 2$, dass dann f selbst einen Fixpunkt $f(x) = x$ hat.

Freiwilliger Zusatz: Gilt das auch für $n = 3$? Oder sogar allgemein, für jedes $n > 2$?

Aufgabe 40: Welche der folgenden Funktionenfolgen f_n konvergieren punktweise und welche gleichmäßig auf dem Intervall I?

(i) $$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}, \qquad \text{auf } I = \mathbb{R};$$

(ii) $$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{für} \quad 0 \leq x < 1/n, \\ 2n - n^2x & \text{für} \quad 1/n \leq x < 2/n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{auf } I = [0, 1];$$

(iii) $$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2}, \qquad \text{auf } I = \mathbb{R}.$$