

Übungen zur Vorlesung

**Analysis I**

WiSe 2021/2022

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

Abgabe: Mittwoch, 01.12.2021, 17 Uhr

**Aufgabe 17:** Bestimme alle komplexen Zahlen  $z$  und skizziere die Lösungsmengen für die gilt

(i)  $\operatorname{Im}(\bar{z}) < -1$ ;

(ii)  $\operatorname{Re}(z^2) > 0$ ;

(iii)  $\left| \frac{z+1}{z-i} \right| \leq 1 \leq \left| \frac{z-1}{z-i} \right|$ ;

(iv)  $\operatorname{Im}\left(i \frac{1+z}{1-z}\right) > 0$ .

**Aufgabe 18:** Betrachte die Abbildung

$$I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad I(z) := 1/\bar{z}.$$

- (i) Zeige, dass  $I$  die Inversion („Spiegelung“) am Einheitskreis ( $|z|^2 = 1$ ) ist: der Punkt  $A \neq 0$  wird abgebildet auf denjenigen Punkt  $A'$  auf dem Strahl vom Ursprung  $O$  in Richtung  $A$ , für den das Produkt der Streckenlängen  $OA$  und  $OA'$  gleich 1 ist.
- (ii) Bestimme die Menge der Fixpunkte  $I(z) = z$  von  $I$  und beschreibe diese Menge geometrisch.
- (iii) Beweise, dass  $I$  eine Involution ist, d.h.  $I(I(z)) = z$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
- (iv) Präzisiere und beweise:  $I$  bildet Geraden und Kreise auf Geraden und Kreise ab.

**Aufgabe 19:** Bestimme gegebenenfalls sup, inf, max, min folgender Mengen:

- (i)  $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ ;
- (ii)  $\{(-1)^n/n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ;
- (iii)  $\{n/(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ;
- (iv)  $P := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Primzahl}\}$ .

**Aufgabe 20:** Bestimme alle Häufungswerte bzw. Grenzwerte folgender Zahlenfolgen  $x_n$  für  $n \rightarrow \infty$ .

(i)  $x_n = (-1)^n/n^2 \in \mathbb{R}$ ;

(ii)  $x_n = (n/(n+1)) \in \mathbb{R}$ ;

(iii)  $x_n = i^n + n^{-2021} \in \mathbb{C}$ ;

(iv)  $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \in \mathbb{R}$ .

**Freiwillige Zusatzaufgabe:** Annaliese verklebt ebene achsenparallele Quadrate so, dass jedes neue Quadrat genau passend an den (unteren, linken, oberen, rechten) Rand der bisherigen Figur anschließt. Die Ränder werden also zyklisch im Uhrzeigersinn durchlaufen. Das erste Quadrat hat Seitenlänge 1. Wie groß ist das  $n$ -te Quadrat? (Angeblich soll Salvador Dali diese Konstruktion in seinem Abendmahl (1955) verwendet haben: [https://en.wikipedia.org/wiki/The\\_Sacrament\\_of\\_the\\_Last\\_Supper](https://en.wikipedia.org/wiki/The_Sacrament_of_the_Last_Supper))