Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2021/2022

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 15.12.2021, 17 Uhr

Aufgabe 25: Sei x_n irgendeine Fibonaccifolge natürlicher Zahlen, d.h. $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ mit irgendwelchen positiven ganzen Zahlen x_0 und x_1 als Startwerten.

(i) Zeige dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/x_{n+1}$ existiert und bestimme den Grenzwert.

(ii) Wie hängt der Grenzwert von den Anfangswerten ab?

Aufgabe 26:

(i) Finde je ein Beispiel zweier reellwertiger Folgen x_n und y_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, für deren Produkt gilt:

  (a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$;

  (b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n$ existiert nicht, aber $|x_n y_n|$ ist beschränkt.

(ii) Die Folge der $n_k,\ k \in \mathbb{N}$ sei durch eine injektive Abbildung $k \mapsto n_k$ von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ sei gegeben. Beweise oder widerlege:

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \infty.$$

Aufgabe 27: Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte, reellwertige Folgen. Zeige, dass

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n &\le \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \\
&\le \liminf_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n \\
&\le \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \\
&\le \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n
\end{aligned}$$

gilt. Finde ein Beispiel, bei dem überall Gleichheit gilt. Finde ein Beispiel, bei dem überall die strikte Ungleichung „$<$“ gilt.

Aufgabe 28: Bestimme alle Häufungswerte oder die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen x_n für $n \to \infty$.

(i) $x_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{p} a_k n^k}{\sum_{k=0}^{p} b_k n^k}$, für feste $(a_k, b_k)_{0 \le k \le p}$ mit $b_p \neq 0$;

(ii) $x_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$.

(iii) $x_n = q^n / n^p$ für beliebige feste $q > 1,\ p \in \mathbb{N}$.

(iv) $x_n = n^p q^n$ für beliebige feste $0 < q < 1,\ p \in \mathbb{N}$

(v) $x_n = \dfrac{n\,\mathrm{i}^n}{n+1} \in \mathbb{C}$.

(vi) $x_n = \dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$.

Freiwillige Zusatzaufgabe:
Annaliese ist etwas Schreckliches passiert: sie hat die genaue Definition des Häufungswerts für Folgen x_n vergessen. Sie erinnert sich nur noch an folgendes:

$$\begin{gathered} x^* \text{ ist ein Häufungswert der Folge } x_n :\Longleftrightarrow \\ \exists \text{ Teilfolge } x_{n_k} \text{ mit ...., so dass } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*. \end{gathered}$$

Jetzt weiß sie nicht mehr, was für die Konvergenz der Teilfolgen x_{n_k} gelten muss, sprich was in .... eingesetzt werden darf:

(i) $\forall k \ :\ n_{k+1} > n_k$

(ii) $\forall k \ :\ n_k \ge k$

(iii) $n_k \to \infty$

Dabei heißt $n_k \to \infty$: zu jeder natürlichen Zahl m existiert ein k_0, so dass $n_k \ge m$ für alle $k \ge k_0$ gilt.
Hilf Annaliese und zeige, dass alle drei Möglichkeiten äquivalente Definitionen ergeben.