Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2021/2022

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Mittwoch, 12.01.2022, 17 Uhr

Weihnachtsaufgaben

Es handelt sich ausschließlich um freiwillige Zusatzaufgaben,
die zusätzliche oder fehlende Extrapunkte einbringen können.
Im Tutorium werden nur versuchte Lösungen besprochen!

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!

Weihnachtsaufgabe 1: Eine Expedition macht sich zum Nordpol auf, um den Weihnachtsmann zu besuchen. Ihr einziges Raupenfahrzeug verbraucht einen Liter Glühwein pro Kilometer und besitzt einen Tank, der genau 1000 Liter Glühwein fasst. Das Basislager befindet sich 2000 Kilometer vom Nordpol entfernt und verfügt über unbegrenzte Glühweinvorräte. Unterwegs kann die Expedition beliebig große Vorratsdepots anlegen, der Transport von Glühwein ist aber ausschließlich im Tank des Raupenfahrzeugs möglich. Wieviel Glühwein wird (mindestens) benötigt, um vom Basislager zum Nordpol zu gelangen?

Hinweis: Für den Rückweg wird auf den ebenfalls unbegrenzten Glühweinvorrat des Weihnachtsmanns vertraut.

Zusatz: Wie weit kann die Expedition mit 1000, 2000, ..., $n \cdot 1000$ Litern Glühwein höchstens kommen?

Weihnachtsaufgabe 2: Annaliese (A) sieht den Weihnachtsstern (S) im Spiegel und wundert sich. In der Schule hat sie gelernt, dass der Lichtstrahl von S in einem Punkt B des ebenen Spiegels so reflektiert wird, dass die Strahlen $\overline{SB}$ und $\overline{BA}$ gleiche Winkel mit der Senkrechten zum Spiegel bilden. An der Uni hat sie von Fermat (1607-1665) gehört, der behauptet hat, dass B der Punkt des Spiegels ist, für den der gesamte Lichtweg (genauer: seine Zeitdauer), von S nach B und dann von B nach A, am kürzesten ist. Stimmen die beiden Behauptungen überein?

Weihnachtsaufgabe 3: Annaliese (A) taucht und betrachtet die Brechung des Lichts vom Weihnachtsstern (S) unter Wasser. In der Schule hat sie das Brechungsgesetz gelernt: der Sinus des Einfallswinkels α ist gleich einer Konstanten c mal dem Sinus des Austrittswinkels β, jeweils zur senkrechten (y-Achse) der horizontalen Wasseroberfläche (x-Achse): $\sin\alpha = c \sin\beta$. Sei B der Punkt der x-Achse, an dem der Lichtstrahl von S nach A die Wasseroberfläche trifft. Der Rechtsanwalt Fermat (1607-1665) hat behauptet, das der Punkt B die mit c "gewichtete" Summe der Längen

$$\overline{SB} + c\overline{BA}$$

minimiert. Leite daraus das Brechungsgesetz geometrisch her. (Später können wir dazu auch Differentialrechnung benutzen, aber die lag ja noch nicht vor.)

Historische Anmerkung: Das Brechungsgesetz wird Herrn Snell (1580-1626) zugeschrieben. Es war aber schon Ibn Sahl (ca. 940-1000) bekannt. Ausführliche Experimente und theoretische Untersuchungen dazu finden sich im Band 7 der monumentalen "Optik" des großen al-Hassan Ibn Al-Haytham (Alhazen, ca. 956-1040), der vielleicht als Begründer der modernen Naturwissenschaft gelten darf. Seine Werke lagen spätestens seit dem 13. Jhdt. ins Lateinische übersetzt vor. Englisch: https://www.jstor.org/stable/20787651

Weihnachtsaufgabe 4: In Zeiten der Präsenzlehre jagt ein punktförmiger Mathematik-Professor leider eine ebenfalls punktförmige Mathematik-Studentin in einem kreisrunden Hörsaal $H = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ ohne Hindernisse (Tische, Stühle, Bananenschalen, ...). Beide können sich mit derselben Maximalgeschwindigkeit bewegen.

Kann der Professor die Studentin vor Beginn der nächsten Vorlesung erreichen oder gibt es für die (kluge) Studentin eine Strategie, das zu verhindern?

Weihnachtsaufgabe 5: Auf einem Tisch einer Bar in Pisa wird ein Turm aus Bierdeckeln errichtet. Die Bierdeckel sind alle identisch, haben eine kreisrunde Grundfläche sowie konstante Dicke und Dichte. Sie werden übereinander gelegt, ohne Klebstoff o.ä. zu verwenden.

Wie weit kann ein so errichteter schiefer Turm maximal über die Tischkante hinausragen? Wieviele Bierdeckel werden benötigt (Schätzung)?

Weihnachtsaufgabe 6: Wahre Geschichte:

Ein namhafter Schweizer Musiker an der Musikalischen Komödie der Oper Leipzig grübelt wegen Corona-Schließungen über Weihnachtssterne und bastelt schließlich für die ferne Geliebte (und die Mathe-Hausaufgaben des gemeinsamen Sohnes) aus 16 Strohhalmen (recyclebar!) gleicher Länge s eine fünfseitige Doppelpyramide (Dekaeder) über dem regulären Strohhalm-Fünfeck der Seitenlänge s. Zum Schluss verbindet er die beiden Pyramiden-Spitzen mit seinem letzten rosa Strohhalm. Siehe urheberrechtlich geschütztes Originalfoto mit zwei Schweizer Teetassen (Privatbesitz!).

Geht das?

(i) Bestimme die Seitenlänge s des regulären Fünfecks im Einheitskreis aus der Gleichung $(\cos x + i \sin x)^5 = 1$. Bestimme daraus mit Pythagoras den Abstand $2h$ der Pyramidenspitzen und berechne $2h/s$ exakt, und numerisch.

(ii) Unter der Annahme $2h = s$ besteht die Figur aus fünf gleichseitigen Tetraedern. Prüfe ob sich die Figur wirklich schließt. Vergleiche dazu den Cosinus des Winkels zwischen zwei Tetraederflächen (Skalarprodukt!) mit dem schon in (i) berechneten Cosinus des Winkels $72° = 360°/5$ exakt, und numerisch. Untersuche dann das Foto nochmal genau auf Schließung.

Zusatz: Überprüfe das Ergebnis experimentell und schicke das “Beweis-Foto” mit.

Weihnachtsaufgabe 7: Die sehr schlaue Annaliese und der ungefähr genau so schlaue Annalyx werden von üblen Räubern überfallen. Ganz ausgeraubt und ohne Masken müssen sie jetzt sogar um ihr Leben zittern. Zum Glück war der faire Räuberhauptmann früher Mathe-Prof, jetzt im Ruhestand, und denkt sich zwei natürliche Zahlen a und b aus. "Ich lass Euch frei," sagt er ihnen, "wenn jeder meine beiden Zahlen errät. Tipp: a und b sind zwei verschiedene Zahlen von 2 bis 99. Annaliese sage ich $a \cdot b$ und Annalyx verrate ich $a + b$. Ihr dürft Euch aber nur sagen, ob ihr die Lösung habt oder nicht. Annaliese fängt an."

Da grübelt Annaliese herum und sagt schließlich: "Keine Ahnung." Annalyx hat auch schon rumprobiert und antwortet sofort: "Hab' ich doch schon vorher gewusst!" Annaliese rechnet panisch weiter um ihr Leben. Plötzlich sagt sie: "Ich hab's: Alles klar!" Da grinst der ungefähr genau so schlaue Annalyx: "Aha: mir dann auch!" Der faire Räuberhauptmann, der ja früher Mathe-Prof war, stöhnt: "Dumm gelaufenünd lässt die beiden frei, noch bevor sie die richtigen Zahlen überhaupt sagen.

Was waren die beiden Zahlen?

Weihnachtsaufgabe 8: Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ mit $z^n - 1 = 0$. Zeige:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$$

und interpretiere diese Gleichung geometrisch.
Tipp: Denke an ein gleichseitiges $n-$Eck.

Weihnachtsaufgabe 9: Für reelle x gelten die sechs (!) Gleichungen:

$$1 = |\exp(ix)|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Wähle drei Gleichungen aus und beweise, oder widerlege, jede einzelne drei Gleichungen, für komplexe x.

Weihnachtsaufgabe 10: Nach zehnjähriger Suche ritzt Hamilton folgende Relationen für die Multiplikation gewisser Elemente i, j, k der Quaternionen $\mathcal{H}$ in eine Dubliner Brücke:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Finde komplexe 2×2-Matrizen $M_i, M_j, M_k \in \mathcal{H}$, welche diese Relationen erfüllen.

Weihnachtsaufgabe 11: Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachte die endlichen ganzzahligen Summen

$$s(n) := \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor n/k \rfloor.$$

Dabei bedeutet $\lfloor x \rfloor$ die ganzzahlige floor-Funktion (Gauß-Klammer), wie immer.

Beweise oder widerlege: die Zahlen $s(n)$ und $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ sind, abhängig von n, jeweils entweder beide gerade oder beide ungerade.

Weihnachtsaufgabe 12: Beweise, dass eine reellwertige Folge genau dann beschränkt ist, wenn jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge enthält.

Hinweis: Uneigentliche Konvergenz nach $\pm\infty$ zählt hier nicht als Konvergenz.

Weihnachtsaufgabe 13: Beweise den Satz von Bolzano-Weierstraß mit Hilfe von Intervallschachtelung.

Weihnachtsaufgabe 14: Vergleiche das Wurzelkriterium W und das Quotientenkriterium Q für positive Reihen $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k > 0$ $(\forall k \in \mathbb{N})$.

Beweise oder widerlege:

(i) $W \implies Q$;

(ii) $Q \implies W$.

Weihnachtsaufgabe 15: Prüfe, ob folgende Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\beta > 0$ konvergieren:

(i) $a_n = \dfrac{1}{(5 + (-1)^n)^n}$;

(ii) $a_n = (\sqrt[n]{\beta} - 1)^n$;

(iii) $a_n = \dfrac{\beta^{2n}}{(1 + \beta^2)^{n-1}}$;

(iv) $a_n = n^{-(1+\frac{1}{n})}$;

(v) $a_n = \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Weihnachtsaufgabe 16: Beweise die folgende Summenformel für reelle x:

$$\sum_{n=0}^{N} \sin(nx) = \frac{\sin(Nx/2)\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \quad \text{falls } \sin(x/2) \neq 0.$$

Weihnachtsaufgabe 17: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\binom{\alpha}{k} := \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)/k!, \qquad \text{außerdem} \qquad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

absolut konvergiert, falls $|x| < 1$. Was passiert für $x = -1$ und $\alpha < 0$ bzw. $\alpha > 0$?

Zusatz: Definiere $(1+x)^\alpha := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, für $|x| < 1$. Zeige, dass dann gilt $(1+x)^\alpha(1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}$.

Weihnachtsaufgabe 18: Prüfe die Folgen a_n auf Konvergenz und bestimme ggf. ihre Grenzwerte:

(i) $a_n = 10^{-n}(1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots + \overbrace{111\cdots1}^{n \text{ Einsen}});$

(ii) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n;$

(iii) $a_{n+1} = \dfrac{2 + a_n}{1 + a_n}$, mit $a_1 = 1$.

Weihnachtsaufgabe 19: Beweise, dass man jeden Steckenzug in der Ebene mit Länge 1 stets durch eine Halbkreisscheibe vom Durchmesser 1 überdecken kann.

Weihnachtsaufgabe 20: Annaliese spielt Spider-Woman. Zu gegebener Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ konstruiert sie ihr Netz auf folgende Weise:

(i) Zeichne den Graphen von f, d.h. die Kurve $\{(x,y)\ ;\ y = f(x)\}$

(ii) Zeichne den an der Winkelhalbierenden $\{x = y\}$ gespiegelten Graphen.

(iii) Starte bei einem beliebigen Punkt $(x_0, 0)$.

(iv) Ziehe eine vertikale Linie vom letzten Punkt zum Graphen von f.

(v) Ziehe eine horizontale Linie vom letzten Punkt zum gespiegelten Graphen.

(vi) Fahre bei (iv) fort.

Annalyx, der in der Vorlesung aufgepasst hat, schaut sich das an und schüttelt verzweifelt den Kopf.

(i) Zeichne Annalieses „Spinnennetz“ für $f(x) = \lambda x(1-x)$ und selbstgewählte Werte $1 < \lambda \leq 4$.

(ii) Begründe, dass die Konstruktion für allgemeines f beliebig lange fortgesetzt werden kann.

(iii) Welche Folge (x_n, y_n) von Punkten ergibt sich für gegebenen Anfangswert $(x_0, 0)$? Gibt es eine Rekursionsgleichung? Gibt es eine explizite Formel?

Freiwilliger Zusatz:

(iv) Was bedeuten Schnittpunkte des Graphen von f seinem Spiegelbild?

Weihnachtsaufgabe 21: Beweise oder widerlege für positive Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen:

(i) Ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$;

(ii) Ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ konvergent, so auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

(iii) Ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ konvergent, so auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$;

(iv) Ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent, so auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$.

Weihnachtsaufgabe 22: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Ferner gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n)^2 < \infty.$$

Zeige, dass dann $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ konvergiert. Konvergiert die Reihe absolut?

Weihnachtsaufgabe 23: [Farey-Sequenzen] Die Mediante zweier Brüche ist durch folgende „Additionsvorschrift“ definiert

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \longmapsto \frac{a+c}{b+d}.$$

Beachte, dass die Darstellung rationaler Zahlen als Bruch nicht eindeutig ist. Die Mediante wird zu einer Funktion auf den Paaren nichtnegativer, rationaler Zahlen, wenn als Argumente nur gekürzte Brüche verwendet werden.

Die Farey-Sequenzen definieren sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{1}\right)\\
F_2 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{1}\right)\\
F_3 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{1}\right)\\
F_4 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{1}\right)\\
F_5 &= \left(\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{1}\right)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Allgemein ergibt sich die Sequenz F_{n+1} aus der Sequenz F_n indem überall

$$(*) \qquad \ldots, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots \qquad \text{durch} \qquad \ldots, \frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}, \ldots$$

ersetzt wird, sofern $b+d \le n+1$ ist. Die Nenner der Sequenz F_n sind also höchstens n.

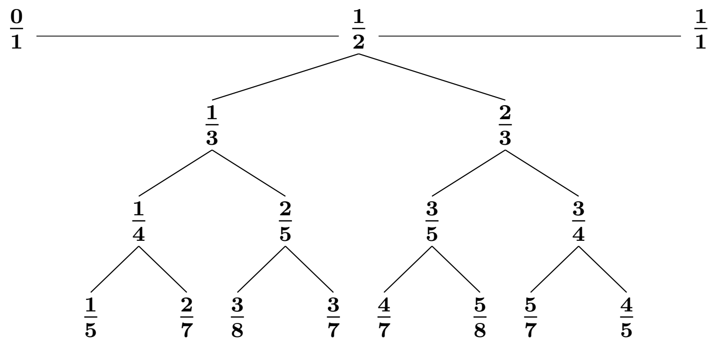
(i) Zeige, dass die Elemente jeder Farey-Sequenz der Größe nach geordnet sind.

(ii) Zeige, dass für benachbarte Elemente $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ von F_n stets gilt: $ad - bc = -1$.

(iii) Zeige mit (ii), dass alle durch $(*)$ erzeugten Brüche automatisch gekürzt sind.

Weihnachtsaufgabe 24: Zeige, dass die zuvor definierte Farey-Sequenz F_n alle gekürzten Brüche mit Nenner kleiner oder gleich n enthält. *Hinweis:* Betrachte dazu einen gekürzten Bruch $\frac{m}{n}$ und die beiden Elemente $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ der Sequenz F_{n-1}, zwischen denen $\frac{m}{n}$ liegt. Zeige dann, dass $n = b + d$ und $m = a + c$.

Die Konstruktion kann auch als Farey-Baum dargestellt werden und liefert eine (bijektive) Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$.



Was sind der kleinste und größte Nenner jeder Zeile?