

Übungen zur Vorlesung

**Analysis I**

WiSe 2021/2022

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

Abgabe: Mittwoch, 12.01.2022, 17 Uhr

**Aufgabe 29:** Eine neugierige, unsterbliche Schnecke sitzt am festgebundenen Ende eines zunächst einen Kilometer langen, beliebig dehnbaren Gummiseils. Das andere Ende hält ein ängstlicher, aber gleichfalls unsterblicher Matheprof. Jede Nacht kriecht die Schnecke auf dem Seil einen Meter auf den Prof zu, der in seiner Panik das Seil jeden Tag um einen Kilometer dehnt.

Erreicht die Schnecke den Prof?

*Freiwilliger Zusatz:* Falls ja: bei welcher Länge des Seils? Falls nein, wann ist der Abstand zwischen beiden größer als der Abstand von der Erde zum Mond? Schätze so gut Du kannst.

**Aufgabe 30:** Betrachte die alternierende harmonische Reihe

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

die konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

- (i) Gib eine divergente Umordnung der Reihe an.
- (ii) Gib eine Umordnung der Reihe an, die gegen 2022 konvergiert.

*Freiwillige Zusätze:*

- (iii) Zeige, dass die Umordnung, bei der sich stets ein positives und 2 negative Glieder abwechseln, genau den halben Wert der ursprünglichen Reihe hat:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{s}{2}.$$

- (iv) Zeige, dass für jedes beliebige  $s \in \mathbb{R}$  eine Umordnung der Reihe existiert, die gegen  $s$  konvergiert.

**Aufgabe 31:** Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz. Berechne ggf. die Grenzwerte.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1};$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+1};$$

$$(iii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1};$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}.$$

*Freiwilliger Zusatz:*

$$(v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$

**Aufgabe 32:** Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n;$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 2^n}{n^n} x^n;$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n;$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{k} x^n, \text{ für festes } k \in \mathbb{N}.$$