

## Kernfragen zur Analysis

### I. Zahlen

1. Wie lautet das *Wohlordnungsprinzip*?
2. Was ist *Vollständige Induktion*?
3. Zeige mittels Vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

4. Was ist die *Zifferndarstellung* einer natürlichen Zahl  $n$  zur Basis  $b$ ?
5. Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Wann nennt man eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  *injektiv*, wann *surjektiv*, wann *bijektiv*?
6. Was sind die *Binomialkoeffizienten*  $\binom{n}{k}$ , und welche Rekursionsformel erfüllen sie? Wie lässt sich die Rekursionsformel *kombinatorisch* (d.h. als Abzählung von Teilmengen) interpretieren?
7. Wie lautet der *Binomische Lehrsatz*? Wie folgt daraus, dass

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n ?$$

8. Was ist eine *rekursiv* definierte Folge? Gib Beispiele an.
9. Was sind *endliche*, *abzählbare* bzw. *überabzählbare* Mengen? Gib Beispiele an.
10. Zeige, dass  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar ist.
11. Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Was ist eine *obere Schranke* für  $A$ ? Wann heißt  $A$  nach oben beschränkt?
12. Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Wie sind *Supremum* und *Infimum* von  $A$  definiert? Wann besitzt  $A$  ein Supremum, wann ein Maximum?
13. Sei  $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ . Bestimme  $\inf B$  und  $\sup B$ .
14. Gib ein Beispiel einer Menge reeller Zahlen an, die ein Supremum aber kein Maximum besitzt.
15. Was ist ein *Dedekindscher Schnitt*?
16. Wie lautet das *Vollständigkeitsaxiom* der reellen Zahlen?
17. Definiere die *komplexen Zahlen* als Paare reeller Zahlen mit geeigneten Additions- und Multiplikationsregeln.
18. Was ist der *Betrag* einer komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$  ?
19. Was ist die zu  $z$  *komplex konjugierte* Zahl  $\bar{z}$  ?

20. Wie hängen  $z$  und  $\bar{z}$  mit  $|z|$  zusammen?
21. Wie lautet der *Fundamentalsatz der Algebra*?
22. Wie hängen komplexe Zahlen  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit Drehstreckungen in  $\mathbb{R}$  zusammen?
23. Was sind Quaternionen?